1.5

NULPUNKTER ELLER SKÆRINGSPUNKTER MED FØRSTEAKSEN

Vort formål i dette afsnit er at udvikle en metode til at bestemme nulpunkter for et polynomium af højere grad.

Dvs. en metode til at løse en ligning af højere grad f(x) = 0, hvor f er et polynomium, hvilket svarer til at bestemme grafens skæringspunkter med 1.-aksen.

Hertil behøver vi en teknik, der benævnes *polynomiers division,* og som belyses i det efterfølgende eksempel.

Husker vi tilbage på hvordan vi lærte at dividere i folkeskolen, så afviger metoden ikke synderligt. Man kan fremstille metoden sådan:

$$
\begin{array}{l}
812 : 4 = 203 \\
\underline{8} \\
1 \\
\underline{0} \\
12 \\
\underline{12} \\
0 \qquad \textit{Resten er } 0.
\end{array}
$$

Så denne division går altså op. Endvidere ved vi nu, at

$$4 \cdot 203 = 812$$

En lignende egenskab vil vi benytte, når der er tale om polynomier.

E1

Skal man udføre divisionen

$$(x^3 + 2x^2 - 4x + 1) : (x - 1)$$

går man frem på følgende måde:

$$
\begin{array}{ll}
 & (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) : (x - 1) = x^2 + 3x - 1 \\
x^2(x-1) = & \underline{x^3 - x^2} \\
\text{rest} & \quad 3x^2 - 4x + 1 \\
3x(x-1) = & \quad \underline{3x^2 - 3x} \\
\text{rest} & \qquad\quad -x + 1 \\
-1(x-1) = & \qquad\quad \underline{-x + 1} \\
\text{rest} & \qquad\qquad\ 0
\end{array}
$$

Divisionen går op (den endelige rest er 0), dvs. vi kan skrive

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x - 1} = x^2 + 3x - 1,$$

hvilket er ensbetydende med, at vi kan skrive trediegradspolynomiet som et produkt

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(x^2 + 3x - 1).$$

Den sidste skrivemåde giver os mulighed for at kontrollere, at divisionen er korrekt udført. Man ganger parenteserne på højre side sammen, reducerer og konstaterer, at det passer med venstre siden.

Ø1

Udfør følgende divisioner:

a) $(4x^3 - x^2 + 3x + 42) : (x + 2)$
b) $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 17) : (x + 1)$
c) $(2x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x + 4) : (x - 2)$
d) $(2x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 3) : (2x - 3)$
e) $(4x^4 - 4) : (2x + 2)$

Det er naturligvis ikke alle divisioner der går op, og man kan – ligeledes naturligvis – også dividere med polynomier af højere grad end 1. Vi skal dog ikke i dette afsnit bruge den slags divisioner, men for fuldstændighedens skyld vises her et eksempel på en sådan division. Vi kommer dog også til at anvende divisioner, som ikke går op, senere i vores standardanalyse.

E2

Nedenfor ses en division af et fjerdegradspolynomium med et andengradspolynomium.

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
 & (2x^4 + 3x^3 & - 5x^2 & + x & - 3) & : (x^2 - 2x + 1) = 2x^2 + 7x + 7 \\
 & 2x^4 - 4x^3 & + 2x^2 & & & \\
\hline
\text{rest} = & 7x^3 & - 7x^2 & + x & - 3 & \\
 & 7x^3 & -14x^2 & + 7x & & \\
\hline
\text{rest} = & & 7x^2 & - 6x & - 3 & \\
 & & 7x^2 & -14x & + 7 & \\
\hline
\text{rest} = & & & 8x & -10 &
\end{array}
$$

Divisionen giver en endelig rest på $8x - 10$, og dermed kan vi, skrive

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + 7x + 7 + \frac{8x - 10}{x^2 - 2x + 1}$$

I en division $f(x) : g(x)$ betegnes $f(x)$ *dividend*, og $g(x)$ betegnes *divisor*. Resultatet af divisionen kan skrives som en *kvotient* $q(x)$ og en *rest* $r(x)$.

I almindelighed gælder følgende regel vedrørende polynomiers division:

POLYNOMIERS DIVISION

Lad f og g være to polynomier. Hvis graden af f er større end eller lig graden af g, findes der et polynomium q og et polynomium r med $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$, således, at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) : g(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

eller

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Som nævnt tidligere skal vi i dette afsnit udelukkende bruge divisioner, der går op. Hvordan sådanne divisioner kan bruges til at løse ligninger af højere grad vises i det følgende eksempel.

E3

Vi ønsker at bestemme nulpunkterne for

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

og begynder med en division der går op. Hvordan man finder frem til en sådan division, skal vi vende tilbage til lidt senere.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2) = x^2 - x - 12 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ \quad -x^2 - 10x + 24 \\ \quad \underline{-x^2 + 2x} \\ \qquad -12x + 24 \\ \qquad \underline{-12x + 24} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Vi konstaterer, at divisionen går op, og dermed at trediegradspolynomiet (dividenden) kan faktoriseres (dvs. skrives som et produkt). Der gælder nemlig, at

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x^2 - x - 12).$$

Hermed kan vi bestemme nulpunkter for trediegradspolynomiet, idet der gælder, at et produkt er nul, hvis en af faktorerne er nul (kaldes ofte for nulreglen).

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ (faktoriseres til)}$$

$$(x - 2)(x^2 - x - 12) = 0 \text{ (anvender nulreglen)}$$

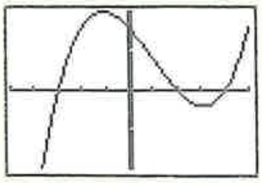
$$x - 2 = 0 \text{ eller } x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = 2 \text{ eller } x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = 2 \text{ eller } x = -3 \text{ eller } x = 4$$

Tallene −3, 2 og 4 er altså nulpunkter for f.

Dette eksempel viser, at med en division der går op, efterfulgt af en faktorisering, kan vi spalte en trediegradsligning op i en førstegradsligning og en andengradsligning, som så kan løses ved hjælp af velkendte metoder.



Ved brug af lommeregneren ses de fundne nulpunkter at passe ganske godt med det grafiske billede.

Ø2

Løs følgende ligninger ved hjælp af metoden:

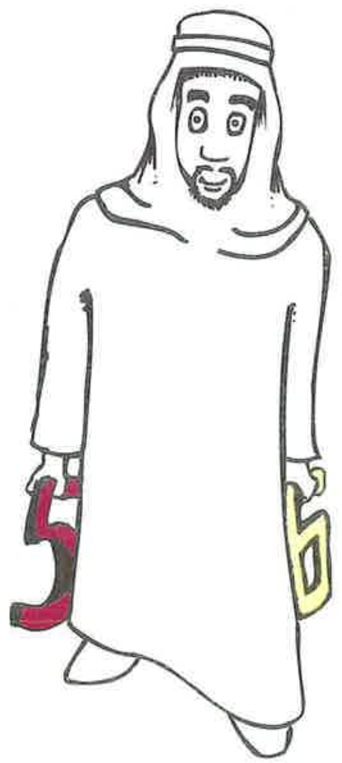
(1) division, (2) faktorisering, (3) nulregel og (4) bestem løsningerne.

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
(divider med $x + 1$)

b) $x^3 + 13x^2 + 55x + 75 = 0$
(divider med $x + 3$)

c) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$
(divider med $x - 1$)

d) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$
(divider med $x - 2$)



Om tallene ...
Tal bruges til at løse ligninger med, tal bruges til at sætte ind i funktioner – og vi får igen nye tal, tal beskriver størrelser på ting osv ...

Det er mere end svært at undgå tallene!

Vidste du, at de tal som vi bruger i dag egentlig stammer fra Indien.

Arabiske købmænd bragte i perioden 800-1100 e.Kr. tallene, næsten i deres nuværende udseende, med sig hjem når de handlede i Indien og i Østen.

Derfor kaldes tallene ofte for Arabertallene.

Det næste spørgsmål der melder sig er: Hvordan finder man en division, der går op?

Man skal lægge mærke til i de foregående eksempler og øvelser, at den division vi begynder med gemmer en løsning i sig. Hvis man dividerer med $x - a$ (og divisionen går op), er a en løsning til ligningen. Det omvendte gælder også, dvs. uden bevis konkluderer vi, at der gælder følgende sammenhæng:

DIVISORER I POLYNOMIER

For et polynomium f er følgende ensbetydende:

1. a er en løsning til $f(x) = 0$ dvs. $f(a) = 0$
2. $(x - a)$ er en divisor i polynomiet $f(x)$

Med denne regel i hånden bliver spørgsmålet nu: hvordan finder man en enkelt løsning til en ligning af højere grad, således at vi kan dividere og faktorisere?

Desværre findes der ikke nogen metode, som virker i alle tilfælde, nogle gange må vi gætte eller prøve at bruge lommeregneren til at finde en værdi tæt på e.l. metoder.

Der findes dog en metode, der er brugbar i mange tilfælde, og som fanger de fleste løsninger til en ligning. Vi beskriver metoden i nedenstående ramme uden dog at bevise påstanden.

p/q-METODEN

Hvis der findes rationale rødder (rødder der kan skrives som en brøk p/q – heraf navnet på metoden) til et polynomium f, så kan de findes på følgende måde.

Lad

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

være et heltalligt polynomium (dvs. alle koefficienter er hele tal).

Hvis det rationale tal $a = \frac{p}{q}$ er en løsning til $f(x) = 0$, *så* går tælleren p op i konstantleddet a_0, og nævneren q går op i den ledende koefficient a_n.

Skrevet på en lidt anden måde, så er de mulige brøk-løsninger

$$= \frac{\text{divisorer i konstantleddet } a_0}{\text{divisorer i ledende koefficient } a_n}$$

Hvordan man bruger denne p/q-metode vises i det følgende eksempel.

E4

Vi ønsker at løse ligningen $\frac{1}{2}x^3 + 2 = x^2 + x$ og går frem på denne måde:

(1) *Reduktion* til heltallig ligning af typen $f(x) = 0$.

$\frac{1}{2}x^3 + 2 = x^2 + x$
(alle led samles på én side)

$\frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 2 = 0$
(polynomiet laves heltalligt)

$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$

Her er den ledende koefficient
$a_3 = 1$, og konstantleddet er $a_0 = 4$.

(2) ***Mulige brøk-løsninger ved brug af p/q-metoden***
Divisorerne i konstantleddet er ±1, ±2, ±4 og divisorerne i den ledende koefficient er ±1, dvs. de mulige brøkløsninger if. p/q-metoden er

$$\frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4}{\pm 1} = \pm 1, \pm 2, \pm 4.$$

(3) ***Gæt en brøk-løsning a***
Vi prøver os frem, indtil vi finder en løsning.

$x = 1$ giver $1 - 2 - 2 + 4 = 1 \neq 0$ dvs. 1 er ingen løsning.

$x = -1$ giver $-1 - 2 + 2 + 4 = 3 \neq 0$ dvs. -1 er ingen løsning.

$x = 2$ giver $8 - 8 - 4 + 4 = 0$ dvs. 2 er en løsning.

(4) ***Division med x – a***
Da 2 er en løsning, vil $x - 2$ gå op i venstre siden. Vi får:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) : (x - 2) = x^2 - 2 \\
\underline{x^3 - 2x^2 } \\
 -2x + 4 \\
 \underline{-2x + 4} \\
 0
\end{array}$$

(5) ***Faktorisering, produktregel og løsninger***

$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ (der faktoriseres)
$(x-2)(x^2-2) = 0$ (nulreglen anvendes)
$x - 2 = 0$ eller $x^2 - 2 = 0$
$x = 2$ eller $x^2 = 2$
$x = 2$ eller $x = \pm\sqrt{2}$

Ø3

Løs ved hjælp af fremgangsmåden (1) reduktion, (2) mulige brøkløsninger, (3) gæt en løsning, (4) division og (5) faktorisering, nulregel og løsninger, følgende ligninger:

a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$
b) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$
c) $x^3 + 6 = 2x^2 + 3x$
d) $x^3 + x = 2\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$

Denne metode kan udvides til ligninger af vilkårlig høj grad. Man skal dog gætte løsninger lige så mange gange som graden er større end to, dvs. for en fjerdegradsligning skal man gætte løsninger to gange.

E5

Vi ønsker at løse fjerdegradsligningen

$$3x^4 + \tfrac{1}{2}x + 3 = 5\tfrac{1}{2}x^3 + 11x^2$$

og går frem på denne måde:

(1) ***Reduktion***
$3x^4 + \frac{1}{2}x + 3 = 5\frac{1}{2}x^3 + 11x^2$ (saml leddene på én side)
$3x^4 - 5\frac{1}{2}x^3 - 11x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$ (polynomiet laves heltalligt)
$6x^4 - 11x^3 - 22x^2 + x + 6 = 0$

(2) *Mulige brøk-løsninger*
Brøk-løsningerne skal findes blandt

$\pm\frac{1, 2, 3, 6}{1, 2, 3, 6} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$

(3) *Gæt en løsning*
$x = 1$ giver $6 - 11 - 22 + 1 + 6 = -20 \neq 0$
dvs. 1 er ikke løsning.

$x = -1$ giver $6 + 11 - 22 - 1 + 6 = 0$
dvs. -1 er en løsning.

(4) *Division*
$(6x^4 - 11x^3 - 22x^2 + x + 6) : (x + 1) = 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$

(5) *Faktorisering og produktregel*
$6x^4 - 11x^3 - 22x^2 + x + 6 = 0$
$(x + 1)(6x^3 - 17x^2 - 5x + 6) = 0$
$x = -1$ eller $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 = 0$

(6) *Mulige brøk-løsninger til $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6 = 0$*
Mulige brøkløsninger er

$\pm\frac{1, 2, 3, 6}{1, 2, 3, 6} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$

(7) *Gæt en løsning til trediegradsligningen*
$x = 3$ giver $162 - 153 - 15 + 6 = 0$ dvs. 3 er en løsning.

(8) *Division*
$(6x^3 - 17x^2 - 5x + 6) : (x - 3) = 6x^2 + x - 2$

(9) *Faktorisering, nulregel og løsninger*
$6x^4 - 11x^3 - 22x^2 + x + 6 = 0$
$(x + 1)(x - 3)(6x^2 + x - 2) = 0$
$x + 1 = 0$ eller $x - 3 = 0$ eller $6x^2 + x - 2 = 0$
$x = -1$ eller $x = 3$ eller $x = -\frac{2}{3}$ eller $x = \frac{1}{2}$

Den generelle løsningsmetode for ligninger af højere grad (mindst 3) kan altså skitseres således:

LIGNING AF HØJERE GRAD

(1) ***Reduktion*** til heltallig ligning af typen $f(x) = 0$

(2) ***Find mulige brøkløsninger***

(3) ***Gæt en løsning a blandt disse***

(4) ***Division med (x – a)***

(5) ***Faktorisering mv.***
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ eller } g(x) = 0$$

Hvis graden af polynomiet g er 2, kan vi bruge diskriminantmetoden til at finde de resterende løsninger. Ellers gentages hele processen indtil g er et andengradspolynomium.

Ø4

Løs følgende ligninger:

a) $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x - 2 = 0$
b) $x^4 + x^3 = 3x^2 + 4x + 4$

Vi vender senere tilbage til hvordan vi kan benytte lommeregneren til at løse ligninger med.

Lommeregner TI-83 kan klare problemet ret nemt!

Ligesom for andengradsligninger er der specielle metoder til løsning af specielle ligninger af højere grad. Fx kan man i alle reducerede ligninger med konstantled lig 0 sætte x uden for parentes og dermed opnå en faktorisering af venstresiden.

E6

Ligningen $3x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$ løses lettest ved at sætte x^2 uden for parentes.

$3x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$ (x^2 sættes uden for parentes)

$x^2(3x^2 + x - 2) = 0$ (nulregel)

$x^2 = 0$ eller $3x^2 + x - 2 = 0$ (diskriminantmetoden)

$x = 0$ (dobbelt) eller $x = -1$ eller $x = \frac{2}{3}$

Visse ligninger 'ligner' andengradsligninger og kan løses ved hjælp af diskriminantmetoden. Vi ser et eksempel herpå.

E7

Ligningen $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ er en fjerdegradsligning, men den kan løses som en andengradsligning, hvis man erstatter x^2 med en ny variabel størrelse, fx z.

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ (vi erstatter x^2 med z)

$z^2 - 4z + 3 = 0$ (andengradsligningen i z løses)

$z = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$

$z = 1$ eller $z = 3$

$x^2 = 1$ eller $x^2 = 3$ (igen benyttes $z = x^2$)

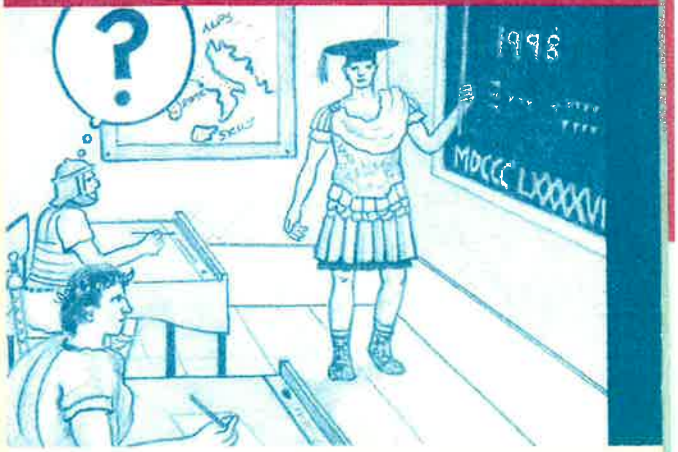
$x = \pm 1$ eller $x = \pm\sqrt{3}$

Ø5

Løs nedenstående ligninger ved hjælp af metoden i eksempel 6 eller metoden i eksempel 7.

a) $2x^3 + 3x^2 + x = 0$
b) $4x^4 + 9x^2 = 12x^3$
c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
d) $x^4 - x^2 - 2 = 0$
e) $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$
f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Polynomier, eller funktioner, hænger nøje sammen med tal. Vi sætter *et tal* ind i et polynomium og får på entydig måde *et tal* ud af polynomiet igen.



Tal er noget lidt underligt noget ...

Igennem tiderne har der været adskillige forskellige metoder til angivelse af størrelser. På tegningen viser Romeren årstallet 1998 skrevet på forskellige måder.

Kileskriften havde sin udbredelse i oldtiden. Romertallene anvendes stadig, dog er de ret besværlige når der er tale om store tal. Både kileskriftens talværdier og romertallene er additive talsystemer, dvs. vi lægger talsymbolerne sammen, når vi skal finde tallets værdi.

Vores titalssystem er et positionstalsystem. Her har man brug for et ciffer til angivelse af ingenting, altså tallet nul, tallet der hverken er positivt eller negativt.

Der gik yderligere nogle hundrede år før de negative tal kom i brug omkring 1400-1500-tallet. Man skulle lige bruge lidt tid på at forstå, at der var noget, der var mindre end ingenting!