MATEMATIK

NOTAT 25

"KOMPLEKSE TAL"

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: MAJ 2026

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
ϒ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

Matematiske symboler:

$\mathbb{N}$	–	Mængden af naturlige tal	$\{1,2,3,4,5...\}$
$\mathbb{Z}$	–	Mængden af heltal	$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{Q}$	–	Mængden af rationale tal	Ægte brøker og endelige decimaltal
$\mathbb{R}$	–	Mængden af reelle tal	
$\mathbb{C}$	–	Mængden af komplekse tal	$\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$
$\cup$	–	Foreningsmængden	$X \cup Y$ er foreningsmængden af mængderne X og Y (Alle elementer i X og Y)
$\cap$	–	Fællesmængden	$X \cap Y$ er fællesmængden af mængderne X og Y (De elementer, som er i både X og Y)
$\subseteq$	–	Undermængde	$X \subseteq Y$ betyder, at X er en undermængde af Y (F.eks.: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$)
$\supseteq$	–	Undermængde	$X \supseteq Y$ betyder, at Y er en undermængde af X (F.eks.: $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Z}$)
$\in$	–	Tilhører	$x \in X$ betyder at elementet x tilhører mængden X (F.eks.: $2 \in \mathbb{N}$)
$\notin$	–	Tilhører ikke	$x \notin X$ betyder at elementet x IKKE tilhører mængden X (F.eks.: $\pi \notin \mathbb{N}$)
$\circ$	–	Sammensat funktion	$f \circ g$ er en sammensat funktion af f og g. F.eks. $\mathrm{f}(g(x))$
$\perp$	–	Vinkelret, ortogonal, perpendikulær	$\vec{a} \perp \vec{b}$ betyder at vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vinkelrette. De tre udtryk (vinkelret, ortogonal og perpendikulær), betyder alle det samme. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=0$
$\vert\vert$	–	Parallel / parallelle	$\vec{a} \,\vert\vert\, \vec{b}$ betyder at vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.
$\Rightarrow$ / $\Downarrow$	–	Implikation / konsekvens	$A \Rightarrow B$ betyder at B er en konsekvens af A, dvs. hvis A så B.
$\Leftarrow$ / $\Uparrow$	–	Implikation / konsekvens	$A \Leftarrow B$ betyder at A er en konsekvens af B, dvs. hvis B så A.
$\Leftrightarrow$ / $\Updownarrow$	–	Biimplikation	$A \Leftrightarrow B$ betyder at A gælder, hvis og kun hvis B gælder.
$\forall$	–	Alkvantor	"For alle" eller "For ethvert"
$\exists$	–	Eksistenskvantor	"Der eksisterer"
$\vert$	–		"For hvilket det gælder"
$\wedge$	–	Og	$x \wedge y$ betyder at BÅDE x og y skal gælde på samme tid.
$\vee$	–	Eller	$x \vee y$ betyder at ENTEN x ELLER y skal gælde på samme tid.

Eksempel: $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \mid y > x$

For ethvert reelt tal, x, eksisterer der et reelt tal, y,
for hvilket det gælder, at y er større end x.

Introduktion til komplekse tal

Tal

Hvad er tal? Tal er et kunstigt og abstrakt værktøj, som bruges til at angive en bestemt mængde.

Tal er kunstige, fordi de er menneskeskabte! De er abstrakte, fordi man har valgt en løsning, hvor man bygger diverse optællinger på 10 cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9. Der er nok ingen tvivl om, at man har valgt at bruge 10 cifre, fordi det passer med antallet af fingre, så man nemmere kan tælle og regne uden at bruge eksterne hjælpemidler. Man kunne vel i virkeligheden lige så godt have valgt at benytte et system, hvor man benytter 2, 8, 16 eller 60. (Det vælges at nævne netop disse tal, da man rent faktisk visse steder benytter (eller har benyttet) positionstalsystemer, som bygger på 2, 8, 16 eller 60 cifre.)

Taltyper

Man skelner mellem de naturlige tal, heltal, brøker, rationale tal, reelle tal, imaginære tal og komplekse tal.

De naturlige tal

De naturlige tal beskrives vha. en mængde, som man normalt angiver som $\mathbb{N}$. Det er de tal, som man kan tælle til, dvs.: 1, 2, 3, 4…
I de tidligste tider hvor mennesker har kunnet kommunikere, har man udelukkende benyttet denne taltype, da aritmetik ikke har været anvendt. Det har f.eks. været væsentligt, at man kunne angive, hvor mange geder, som man havde i en indhegning etc.
Da tallet 0, er et relativt moderne fænomen, har man ikke haft **0** geder, man har haft **ingen** geder.
Den første brug af ”0” i et positionstalsystem som er kendt, er fra ca. år 1000 f.Kr.
Vælger man at inkludere tallet 0 blandt de naturlige tal, skrives dette som $\mathbb{N}_0$.

Heltal

På et tidspunkt i historien har man formentlig manglet en ged! Der har altså været underskud i antallet af geder, og nogen har fundet på at udvide mængden af de naturlige tal (inklusive 0) med de negative tal, altså: -1, -2, -3…
Mængden af heltal skrives som $\mathbb{Z}$.

Brøker

Igen har behovet for nye tal eskaleret. To bønder har haft to geder sammen. Man kan også sige, at hvis makkerskabet ophæves, så har de hver en ged. Men hvis de to geder nu er en han og en hun, så er der chance for, at der en dag er tre geder. (Lige netop dén type matematik, må være op til læserens fantasi… Spørg evt. en biologilærer) Hvis de to bønder nu går hver til sit, har de altså halvanden ged hver, men det kan ikke skrives vha. heltal. Det kræver en division, som ender med et resultat, som ikke er et helt tal.
Brøker siges at være en del af det rationale tallegeme. Endelige decimaltal er også en del af det rationale tallegeme.
Mængden af rationale tal skrives som $\mathbb{Q}$.

Irrationelle tal

Nu kan man ikke længere hente eksempler fra oldtidens bønder. Hvis man udelukkende benytter de fire elementære regnearter: addition (plus, +), subtraktion (minus –), multiplikation (gange ·) og division (skrives som en brøk), er der heller ikke behov for andre taltyper end dem, som allerede er beskrevet.
I nyere tid (i de seneste 4500 år), er der dog opstået et behov for en anden type tal. F.eks. π pi).
π kendes i dag vha. kraftige computere med over 1.241.100.000.000 decimaler. I virkeligheden er der dog uendeligt mange decimaler, hvilket samtidig betyder, at tallet ikke kan skrives som en brøk!
Man siger også at to længder (tal) er inkommensurable, hvis der ikke kan findes et fælles mål for dem.
Dette (π) er blot et enkelt eksempel på et tal, som ikke kan skrives hverken som et helt tal eller som en brøk. Inddrages også potensregning og regning med f.eks. kvadratrødder, viser det sig, at der er rigtig mange af den slags tal. Her er det også vigtigt at huske, at begreberne ∞ (uendeligt) og $-\infty$ (minus uendeligt) også indgår i kategorien reelle tal.

Reelle tal

De reelle tal er foreningsmængden af alle brøker og alle irrationelle tal. Eller med andre ord – alle tal, som ikke kan skrives som et heltal.
Den samlede mængde af reelle tal skrives som $\mathbb{R}$.
I den daglige matematik, vil man også sige, at $\mathbb{R}$ også indeholder heltal, således at man som oftest betragter $\mathbb{R}$ som ”alle (normale) tal”.
Vil man specificere, at der er tale udelukkende om positive reelle tal, skrives $\mathbb{R}_+$.
Alle positive reelle tal samt 0, skrives $\mathbb{R}_0$.

Imaginære tal

Nu kunne man tro, at der ikke var behov for yderligere talkategorier. Det viser sig dog at være en fejlagtig antagelse. Man kan løse f.eks. en andengradsligning og finde ud af, at den ikke har nogen løsning. Det er dog kun, hvis man tilgår problemet uden at kende til de imaginære tal.
Grunden til at en andengradsligning ikke har nogen umiddelbare rødder er, at diskriminanten er negativ! Da man ikke (umiddelbart) kan uddrage kvadratroden af et negativt tal, kan udregningen ikke lade sig gøre, og man siger, at der ikke er nogen reelle rødder til andengradsligningen.
Med de imaginære tal, vil man kunne udregne kvadratroden og få et brugbart resultat.
Imaginære tal tilhører mængden $\mathbb{C}$ (Complex numbers)

Komplekse tal

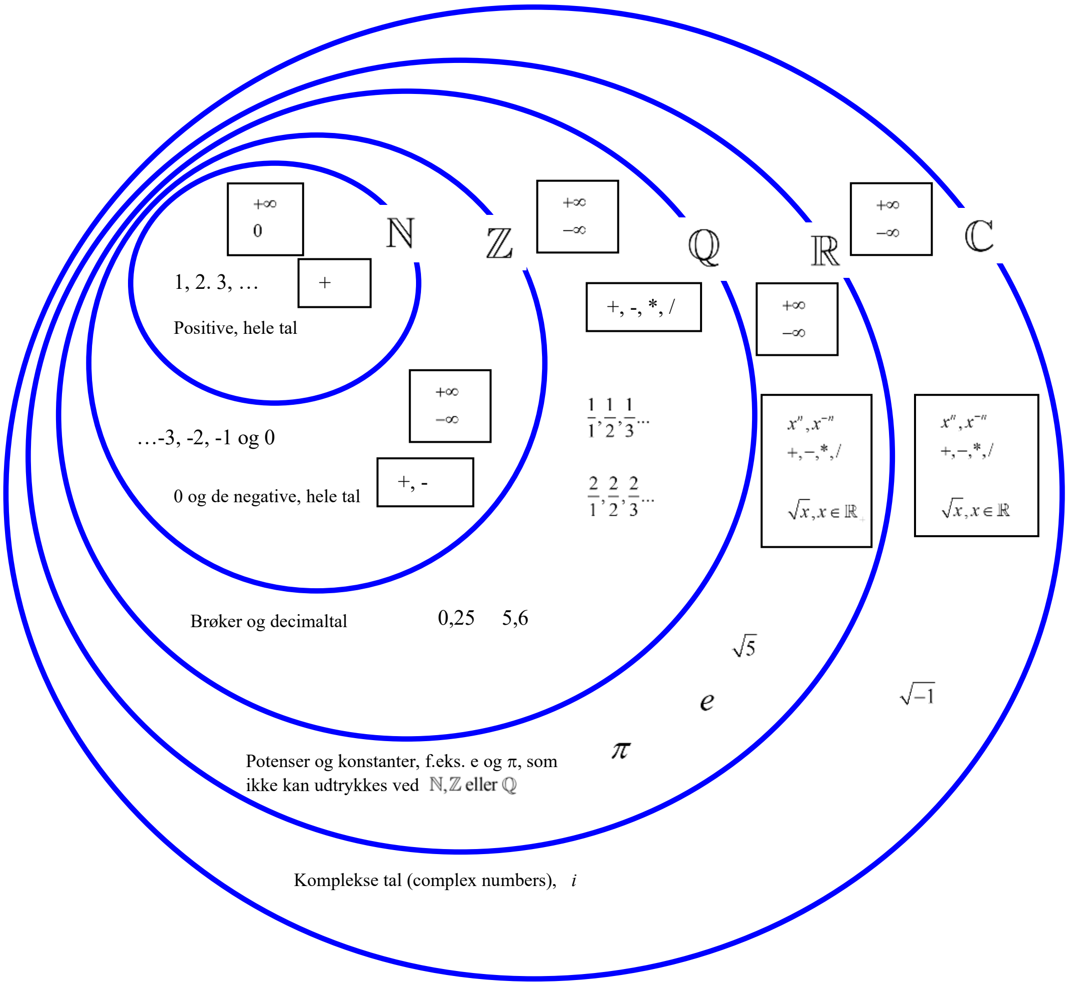
Et komplekst tal er et tal, som kan indeholde både en imaginær del og en reel del.

Taltyperne som mængder

Betragter man taltyperne som mængder, kan man sige at f.eks. de naturlige tal er en ægte delmængde af de reelle tal. Faktisk er alle taltyperne delmængder af de mere inkluderende taltyper.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Eller vist mere grafisk:



Det er netop de komplekse tal, som dette notat omhandler.

Bemærk, at et komplekst tal består at to dele: En reel del og en imaginær del. Begge dele behøver ikke at være til stede, for at der kan være tale om et komplekst tal.

De komplekse tals legeme

Ser man lige et øjeblik tilbage på de reelle tal, er de primært organiseret ved to regneregler: addition og multiplikation.

Derfor gælder følgende regler:[1] [2]

Addition:

a) Stabilitet	$\forall x,y \in M : x+y \in M$ (1)
b) Den kommutative lov:	$a+b=b+a$ $\forall x,y \in M : x+y=y+x$ (2)
c) Den associative lov:	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $\forall x,y,z \in M : (x+y)+z=x+(y+z)$ (3)
d) Der eksisterer et nulelement 0:	$a+0=0+a=a$ $\forall x \in M : x+n=x$ (4)
e) Ethvert tal a har et omvendt $-a$:	$a+(-a)=(-a)+a=0$ $\forall x \in M \exists y \in M : x+y=0$ (5)

Multiplikation:

a) Stabilitet	$\forall x,y \in M : x \cdot y \in M$ *(6)*
b) Den kommutative lov:	$a \cdot b = b \cdot a$ $\forall x,y \in M : x \cdot y = y \cdot x$ (7)
c) Den associative lov:	$(ab)c=a(bc)$ $\forall x,y,z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (8)
d) Der eksisterer et ételement 1:	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $\forall x \in M : x \cdot e = x,\ e \neq n$ (9)
e) Ethvert tal $a \neq 0$ a har et reciprokt a^{-1}:	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ $\forall x \in M \setminus \{0\} \exists y \in M : x \cdot y = e$ (10)

Addition-Multiplikation:

a) Den distributive lov:	$a(b+c)=ab+ac$ $\forall x,y,z \in M : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (11)

Ser man på disse regler, er det nok ikke overraskende, at nulelementet og ételementet refereres til som neutrale elementer, for hhv. addition og multiplikation respektivt. Dette skyldes åbenlyst, at de ikke forandrer det tal, som de adderes/multipliceres med.

Ligeledes kaldes de omvendte og de reciprokke værdier som inverse elementer.

Er en talmængde organiseret ved to af disse regneregler, kaldes den for et legeme.
(På engelsk, kaldes det for ”a field” og på tysk ”Körper”.)

[1] http://da.wikipedia.org/wiki/Legeme_%28algebra%29
[2] Carstensen, Jens: Komplekse tal, 2. rev. udg.

Således er $(\mathbb{R},+,\cdot)$ et legeme. Ligeså er $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, hvorimod $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ og $(\mathbb{N},+,\cdot)$ ikke er det.

Dette kan forenklet siges, at tal, der udelukkende er fremkommet som regnestykker med addition og subtraktion med hele tal ikke kan kaldes legemer. Skal der være tale om legemer, skal der yderligere benyttes multiplikation eller division – med andre ord, brøker eller decimaltal.

Endnu mere forenklet kan man sige, at et tallegeme er en talmængde, hvor alle de "sædvanlige" elementære regneregler gælder.

Et andet eksempel på et tallegeme kunne være: $\left\{ r_1 + r_2\sqrt{2} \middle| r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \right\}$.

Lad defineres nu – inden for mængden $\mathbb{R}^2$ af reelle talpar – to regneregler, nemlig de tidligere omtalte: addition og multiplikation, som organiserer $\mathbb{R}^2$ til et legeme.

På nøjagtig samme måde som den tidligere gennemgåede vektoraddition, defineres:

$$(x_1;x_2)+(y_1;y_2)=(x_1+y_1;x_2+y_2) \tag{12}$$

.

Multiplikation defineres som – noget mere specielt:

$$(x_1;x_2)\cdot(y_1;y_2)=(x_1\cdot y_1-x_2\cdot y_2;x_1y_2+x_2y_1) \tag{13}$$

Det ønskes nu at eftervist, at $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ er et legeme, og det betyder, at kravene i boksene på forrige side alle skal være opfyldt.

Addition a), b) & c) indses umiddelbart!

Addition d): Nulelementet ved addition er $(0;0)$, da:

$$(x_1;x_2)+(0;0)=(x_1+0;x_2+0)=(x_1;x_2)$$

Addition e): Det omvendte talpar til $(x_1;x_2)$ er $(-x_1;-x_2)$, da:

$$(x_1;x_2)+(-x_1;-x_2)=(x_1+(-x_1);x_2+(-x_2))=(x_1-x_1;x_2-x_2)=(0;0)$$

Multiplikation a), b) & c) indses umiddelbart!

Multiplikation d): Ételementet ved multiplikation er $(1;0)$, da:

$$(x_1;x_2)\cdot(1;0)=(x_1\cdot 1-x_2\cdot 0;x_1\cdot 0+x_2\cdot 1)=(x_1-0;0+x_2)=(x_1;x_2)$$

Multiplikation e): Forudsat at $(a_1;a_2)\neq(0;0)$, søges det reciprokke talsæt til $(a_1;a_2)$. Det er med andre ord det talsæt $(x_1;x_2)$, som multipliceret med $(a_1;a_2)$ giver ételementet, $(1;0)$.

Dette kan opstilles i følgende ligning:

$$(x_1;x_2)\cdot(a_1;a_2)=(1;0)$$

Ifølge definitionen om multiplikation, kan der på dette grundlag opstilles to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} a_1x_1 - a_2x_2 &= 1 \\ a_2x_1 + a_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan løses på et utal af måder, men benyttes determinantmetoden, ses det at determinanten er $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

Der eksisterer derfor netop én løsning, som er:

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \qquad x_2 = \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Addition-Multiplikation a): Indses umiddelbart!

Da alle krav til et tallegeme således er opfyldt for $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$, er det derfor vist, at $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ er et tallegeme, hvor man kan regne med de elementære regneregler.

Dette giver anledning til følgende definition:

Definition: Mængden $\mathbb{R}^2$ med regnereglerne addition og multiplikation, som ovenfor beskrevet kaldes de komplekse tal og betegnes $\mathbb{C}$.

Rundt omkring kan man se mange forklaringer og definitioner på de komplekse tal, men man skal være opmærksom på, at en del af disse forklaringer, netop ér forklaringer, mere end en egentlig definition.

Samtidig kan man så sidde tilbage med en tør smag i munden og en fornemmelse af, at man ikke er kommet meget videre, men det vil blive mere forståeligt efter de første par eksempler.

Regneregler for komplekse tal

Til at begynde med nøjes man med at se på en delmængde af $\mathbb{R}^2$, som er defineret ved:

$$\mathbb{R}^* = \{(x;0) | x \in \mathbb{R}\}$$

Det bemærkes at det er alle de komplekse tal, hvis andenkomponent er lig med 0. Men netop da andenkomponenten er den, som indeholder den imaginære taldel, vil det faktisk sige, at dette er mængden af alle komplekse tal uden imaginær del, hvilket igen vil svare til de normale reelle tal.

Addition og multiplikation af elementer i $\mathbb{R}^*$ giver igen elementer i $\mathbb{R}^*$.
Det kan siges, at $(\mathbb{R}^*;+;\cdot)$ er et dellegeme af $(\mathbb{C};+;\cdot)$.

Som allerede nævnt kan man identificere elementerne i $\mathbb{R}^*$ med de reelle tal, idet man i stedet for $(x;0)$ bare kan skrive x. Som også nævnt endnu tidligere kan dette udvides til at sige, at mængden af de reelle tal, $\mathbb{R}$, opfattes som en delmængde af mængden af de komplekse tal, $\mathbb{C}$.

Introduceres nu også de imaginære taldele, kan man altså – modsat af det, der allerede er beskrevet – skrive det som: $(0;1)$. Dog bruger man bare at skrive bogstavet "i" i stedet for det komplekse tal, $(0;1)$.

Tallet i findes ved multiplikation:

$$i^2 = (0;1)\cdot(0;1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1; 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (0-1;0+0) = (-1;0)$$

Idet det huskes, at $(-1;0)$ kan identificeres som det reelle tal -1, kan dette simplificeres til:

$$i^2 = -1$$

Nu indføres y, som er et reelt tal $(\exists y \in \mathbb{R})$.

Multipliceres i med y, fås resultatet:

$$iy = (0;1)\cdot(y;0) = (0\cdot y - 1\cdot 0; 0\cdot 0 + 1\cdot y) = (0;y)$$

Dermed kan følgende nemt indses:

$$(x;y) = (x;0) + (y;0) = (x;0) + i(y;0) = x + iy$$

Det er nu klart, at ethvert komplekst tal, z, kan skrives på formen:

$$z = (x;y) = x + iy, \text{ hvor } i^2 = -1$$

Tallet x kaldes for realdelen af z og y kaldes for imaginærdelen af z.

Det skrives således:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z, \qquad z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z$$

Specielt gælder det, at hvis:

$\operatorname{Re} z = 0$: $z = iy$, og z kaldes da for et rent imaginært tal.

$\operatorname{Im} z = 0$: $z = x$, og z kaldes da for et reelt tal.

$$z = x + iy \tag{14}$$

Konjugerede tal

Konjugerede tal er en vigtige, når man taler om komplekse tal.
For at kunne konjugere et komplekst tal, skal der lige indføres nogle regneregler:

Er $z = x + iy$ et komplekst tal, skrives det konjugerede tal som:

$$\bar{z} = x - iy \tag{15}$$

Regneregler:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \text{og} \qquad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w} \tag{16}$$

Bevis:

Hvis $z = x + iy$ og $w = u + iv$,
da er $\bar{z} = x - iy$ og $\bar{w} = u - iv$ og dermed: $z + w = (x + u) + i(y + v)$

Heraf følger:

$\overline{z + w} = x + u - i(y + v))x - iy + u - iv = \bar{z} + \bar{w}$.

Dette vises tilsvarende nemt for multiplikation.

$$z + \bar{z} = 2x = 2 \cdot \operatorname{Re} z \qquad \text{og} \qquad z - \bar{z} = 2iy = 2i \cdot \operatorname{Im} z \tag{17}$$

Denne regneregel bevises også nemt, på samme måde som de forrige.

Nu indføres skrivemåden: $z = x + iy$ i stedet for at benytte talpar. Dette gør udregningerne med komplekse tal nemmere, og især multiplikation vil forekomme mere naturlig at udregne med denne form.

Et par eksempler[3]

Givet to komplekse tal: $z_1 = 3 - 4i$ og $z_2 = 7 + 5i$.

$$z_1 + z_2 = 3 - 4i + 7 + 5i = 3 + 7 - 4i + 5i \Rightarrow \underline{\underline{z_1 + z_2 = 10 + i}}$$

$$z_1 - z_2 = 3 - 4i - (7 + 5i) = (3 - 7 - 4i - 5i) \Rightarrow \underline{\underline{z_1 - z_2 = -4 - 9i}}$$

Multiplikation foretages som normalt på grundlag af de distributive love. Det vil med andre ord sige, at man som normalt kan gange parenteser ud som normalt.

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i) \cdot (7 + 5i) = 21 + 15i - 28i - 20i^2 = 21 - 13i - 20(-1) \Rightarrow \underline{\underline{z_1 \cdot z_2 = 41 - 13i}}$$

Kvotienten (division) mellem to komplekse tal, simplificeres ved at forlænge forholdet (brøken) med nævnerens konjugerede tal:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 4i}{7 + 5i} = \frac{(3 - 4i) \cdot (7 - 5i)}{(7 + 5i) \cdot (7 - 5i)} = \frac{21 - 43i + 20i^2}{49 - (5i)^2} = \frac{1 - 43i}{49 + 25} = \frac{1 - 43i}{74} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{74} - \frac{43}{74}i}}$$

[3] Carstensen, Jens: Komplekse tal, 2. rev. udg., p. 9

Den komplekse talplan

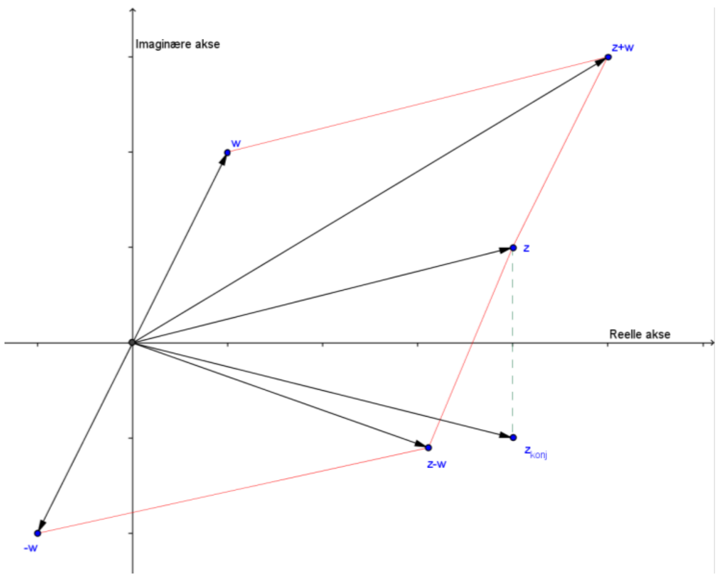
Man kan afbilde de komplekse tal i et talplan.

Hvis man som tidligere identificerer mængden af reelle talpar $\mathbb{R}^2$ med punkterne i et sædvanligt kartesisk koordinatsystem, kan mængden $\mathbb{C}$ afbildes som punkter i planen på sædvanlig vis, såfremt det vælges at opfatte det komplekse tal: $z = x + iy$ som et **punkt** med koordinaterne $(x; y)$ i planen.

I dette tilfælde vil man så kalde abscissen (x-aksen) for den reelle akse, og ordinaten (y-aksen) for den imaginære akse.

Særligt er det værd at bemærke, ved at betragte et komplekst tal $z = x + iy$ og dets konjugerede tal $\overline{z} = x - iy$, at de to tal må være hinandens spejlinger om den reelle akse.

Som det var tilfældet med helt almindelig vektoraddition og -subtraktion, ses det nu, at man fuldstændigt analogt kan overføre dette til definitionen på addition og subtraktion af komplekse tal, såfremt man betragter de stedvektorer, som svarer til tallene z og w.



I flere tilfælde vil det være tjenstligt, hvis man kender længden af den stedvektor, der svarer til et komplekst tal, men også den vinkel, der hører til vektoren.

Det er allerede åbenlyst, at lige præcis denne del af regning med komplekse tal i høj grad har mange paralleller til vektorregningen. Derfor er det næppe heller overraskende, at man kan indføre følgende definition:

Definition: Den numeriske værdi af det komplekse tal $z = x + iy$ introduceres. Den numeriske værdi repræsenterer længden af den stedvektor, som svarer til z:

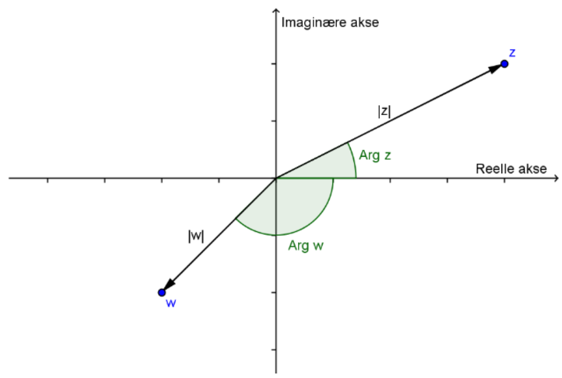
$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{18}$$

Den numeriske værdi af et komplekst tal kaldes også for modulus til z.

Den tilhørende retningsvinkel kaldes for argumentet til z. Det noteres $\arg z$.
Tallet 0 har intet argument.

Det er indlysende, at beviset for den numeriske værdi af det komplekse tal z er fuldstændigt analogt til beviset for en vektors længde.

Det vides fra de trigonometriske grundformler, at såfremt $v = \arg z$, så er alle tallene $v + 2\pi$ ligeledes argumenter til z. Det vil dog ikke give anledning til fejltagelser, idet den værdi af $\arg z$, der ligger i intervallet $\left[-\pi;\pi\right]$ kaldes for hovedargumentet for z, og betegnes $\operatorname{Arg} z$ - altså skrevet med et stort A.



Bemærk definitionsintervallet: $\left[-\pi;\pi\right]$. Der regnes ikke med negative vinkler, men derimod med den korteste af supplementvinklerne.

$$\begin{gathered}\arg z = v \Leftrightarrow \cos(v) = \frac{x}{r} \wedge \sin(v) = \frac{y}{r} \Leftrightarrow \cos(v) = \frac{x}{|z|} \wedge \sin(v) = \frac{y}{|z|} \\ z = x + iy = r\left(\cos(v) + i \cdot \sin(v)\right) = |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)\right)\end{gathered} \tag{19}$$

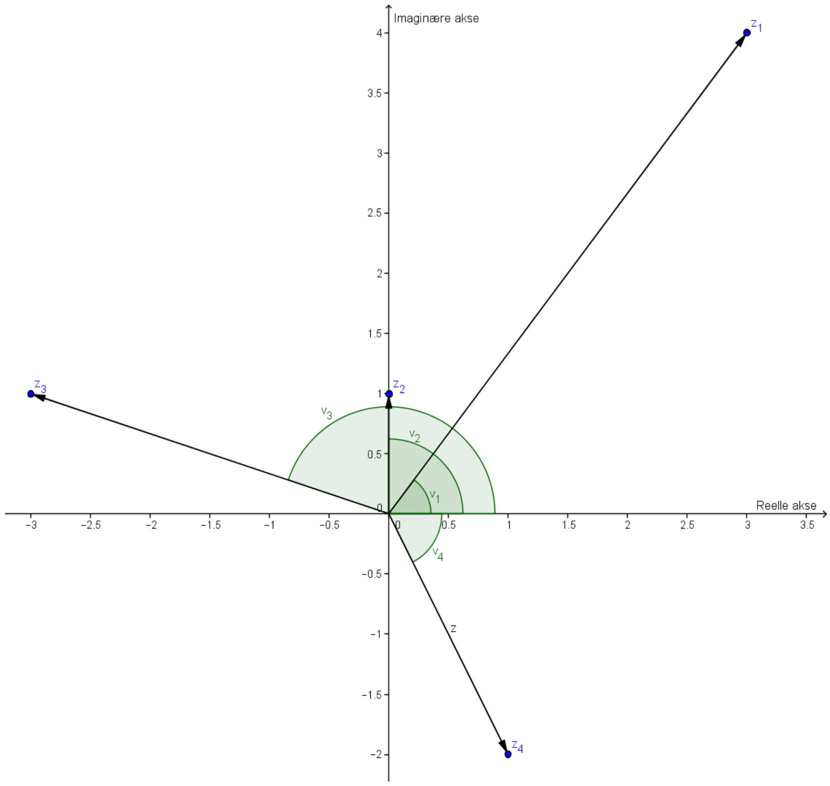
Læg især godt mærke til "og"-symbolet! Det er nødvendigt at udregne begge ligninger for at fastslå vinklen entydigt i planet.

Det indses nemt, at alle reelle tal kan skrives som komplekse tal, som har argumenterne 0 eller $-\pi$, og alle rent imaginære tal kan skrives som komplekse tal, som har argumenterne $-\frac{1}{2}\pi$ eller $\frac{1}{2}\pi$.

Et par eksempler[4]

Givet de fire komplekse tal:

$z_1 = 3 + 4i$ $z_2 = i$ $z_3 = -3 + i$ $z_4 = 1 - 2i$



De fire moduli for de fire komplekse tal udregnes således:

$$|z_1| = \sqrt{\mathrm{Re}\, z_1^{\,2} + \mathrm{Im}\, z_1^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \underline{\underline{= 5}}$$

$$|z_2| = \sqrt{\mathrm{Re}\, z_2^{\,2} + \mathrm{Im}\, z_2^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} \underline{\underline{= 1}}$$

$$|z_3| = \sqrt{\mathrm{Re}\, z_3^{\,2} + \mathrm{Im}\, z_3^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} \underline{\underline{= \sqrt{10}}} \approx 3{,}16$$

$$|z_4| = \sqrt{\mathrm{Re}\, z_4^{\,2} + \mathrm{Im}\, z_4^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+1} \underline{\underline{= \sqrt{5}}} \approx 2{,}24$$

Argumenterne udregnes også:

[4] Carstensen, Jens: Komplekse tal, 2. rev. udg., p. 12

$$\cos(v_1) = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{|z_1|} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_1 = \pm 0{,}9273(rad)}$$

$$\sin(v_1) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{|z_1|} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_1 = 0{,}9273(rad)}}$$

$$\cos(v_2) = \frac{x_2}{r} = \frac{x_2}{|z_2|} = \frac{0}{1} = 0 \quad \Leftrightarrow v_2 = \arccos(0) \quad \Leftrightarrow \underline{v_2 = \pm\frac{\pi}{2}(rad)} \approx \pm 1{,}5708(rad)$$

$$\sin(v_2) = \frac{y_2}{r} = \frac{y_2}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Leftrightarrow v_1 = \arcsin(1) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = \frac{\pi}{2}(rad)}} \approx 1{,}5708(rad)$$

$$\cos(v_3) = \frac{x_3}{r} = \frac{x_3}{|z_3|} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \quad \Leftrightarrow v_3 = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_3 = \pm 2{,}8198(rad)}$$

$$\sin(v_3) = \frac{y_3}{r} = \frac{y_3}{|z_3|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_3 = 2{,}8198(rad)}}$$

$$\cos(v_4) = \frac{x_4}{r} = \frac{x_4}{|z_4|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow v_4 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_4 = \pm 1{,}1071(rad)}$$

$$\sin(v_4) = \frac{y_4}{r} = \frac{y_4}{|z_4|} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_4 = -1{,}1071(rad)}}$$

Det bemærkes, at når man finder arcuscosinus, så er der jo to løsninger: En over abscissen og en under. Udregner man også løsningen, som er givet ved arcussinus, fjernes dog enhver tvivl om hvilken af løsningerne, som er den rigtige.

Hvis der indføres skrivemåden ”polære koordinater” (altså en positionsbestemmelse i et koordinatsystem vha. en længde og en vinkel), kan følgende notation benyttes:

$$z = |z| \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v)) = (r)_v, \text{ hvor: } r = |z| \text{ og } v = \arg z \tag{20}$$

Gives de fire vektorer i ovenstående eksempel på denne form, fås:

$\underline{\underline{z_1 = (5)_{0{,}9273}}}$ $\underline{\underline{z_2 = (1)_{\frac{1}{2}\pi}}}$ $\underline{\underline{z_3 = \left(\sqrt{10}\right)_{2{,}8198}}}$ $\underline{\underline{z_4 = \left(\sqrt{5}\right)_{-1{,}1071}}}$

De Moivres formel

Når der tales om multiplikation og division i forbindelse med komplekse tal, har modulus og argumentet stor betydning.

Givet de to komplekse tal z og w på formen:

$$z = r_1\left(\cos(v) + i\cdot\sin(v)\right) \qquad \& \qquad w = r_2\left(\cos(u) + i\cdot\sin(u)\right),$$

hvor $r_1 = |z|$ og $r_2 = |w|$.

Idet definitionen for multiplikation for komplekse tal benyttes, fås:

$$\begin{aligned} zw &= r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(v)\cdot\cos(u) - \sin(v)\cdot\sin(u) + i\cdot\left(\cos(v)\cdot\sin(u) + \sin(v)\cdot\cos(u)\right)\right) \\ &= r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(v+u) + i\cdot\left(\sin(v+u)\right)\right) \end{aligned}$$

Der er her benyttet additionsformlerne for sinus og cosinus.[5]

$$\begin{aligned} \rightarrow\quad & \sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b) \\ & \sin(a-b) = \sin(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot\sin(b) \\ \rightarrow\quad & \cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b) \\ & \cos(a-b) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\cdot\sin(b) \end{aligned} \qquad (21)$$

Af dette (samt af "Idiotformlen: $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$ "), ses det, at modulus for produktet zw er lig med $r_1\cdot r_2$ samt at argumentet er lig med $v+u$ (Se formel (19).)

Dette giver – ligeledes af formel (19) – følgende resultat:

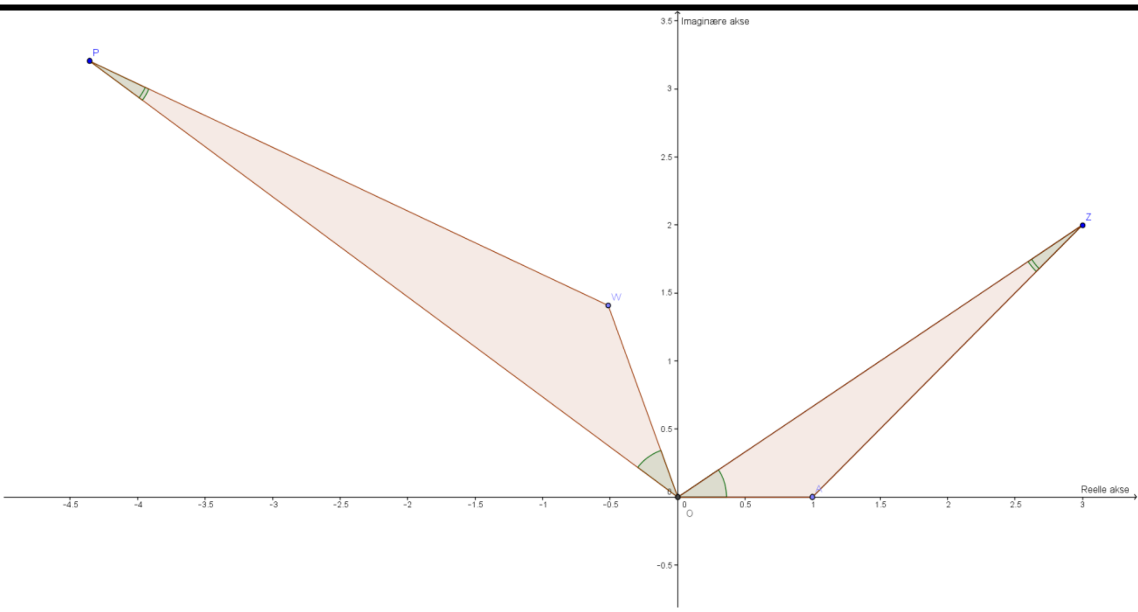
$$|zw| = |z|\cdot|w| \qquad \text{og} \qquad \arg(zw) = u + v = \arg z + \arg w. \qquad (22)$$

På denne måde, kan man anskueliggøre multiplikation af komplekse tal, som vist i nedenstående figur. På denne figur er Z og W punkter i den komplekse plan, som repræsenterer hhv. de komplekse tal z og w. Desuden er punktet $A(1;0)$ indsat.

Man betragter $\triangle OAZ$ og placerer punktet P således, at $\triangle OAZ$ bliver ensvinklet med $\triangle OWP$. Ifølge reglen om ensvinklede trekanter[6] er de to trekanters sider proportionale:

$$\frac{|OA|}{|OW|} = \frac{|OZ|}{|OP|} \Leftrightarrow |OP| = \frac{|OZ|\cdot|OW|}{|OA|} \overset{\text{Da } |OA| \text{ er lig med 1}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{|OP| = |OZ|\cdot|OW|}} \qquad (23)$$

[5] F.eks.: Preben Madsen: Teknisk matematik, p. 324.
[6] F.eks.: Preben Madsen: Teknisk matematik, p. 85.



Idet punktet P repræsenterer det komplekse tal, p, findes (iflg. formel (23)):

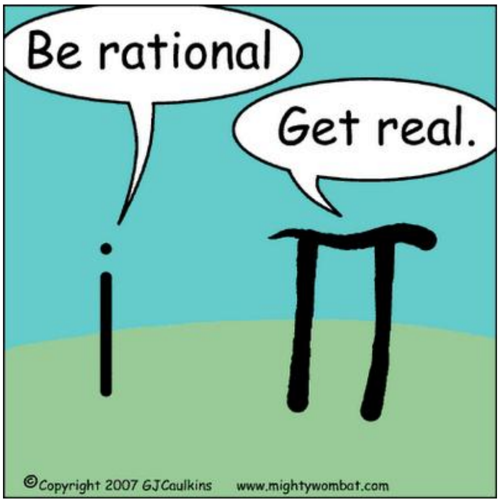
$$|p| = |z| \cdot |w| = |zw| \tag{24}$$

Desuden findes (iflg. formel (22)):

$$\begin{aligned} \arg p &= \measuredangle AOP = \measuredangle AOW + \measuredangle WOP = \measuredangle AOW + \measuredangle AOZ \\ &= \arg w + \arg z \\ &= \arg(wz) \end{aligned} \tag{25}$$

Konklusionen må være, at tallene p og wz har samme modulus og samme argument, og at de derfor er ens:

$$p = wz$$



Der nævnes yderligere nogle regneregler for multiplikation og division:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$
$$\Updownarrow \qquad (26)$$
$$\underline{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$$

Da $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, fås følgende to sætninger:

$$1 = |1| = \left| z \cdot \frac{1}{z} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right|$$
$$\Updownarrow \qquad (27)$$
$$\underline{\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}}$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| z \cdot \frac{1}{w} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1}{w} \right| = |z| \cdot \frac{1}{|w|}$$
$$\Updownarrow \qquad (28)$$
$$\underline{\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}}$$

Da $0 = \arg 1 = \arg\left(z \cdot \frac{1}{z} \right) = \arg z + \arg\frac{1}{z} \Leftrightarrow \arg\frac{1}{z} = -\arg z$, fås:

$$\arg\frac{z}{w} = \arg\left(z \cdot \frac{1}{w} \right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{w} \right)$$
$$\Updownarrow \qquad (29)$$
$$\underline{\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w}$$

Ovenstående regneregler for z og w, giver for det tilfælde, at $z = w$:

$$|z^2| = |z|^2 \qquad \text{og} \qquad \arg(z^2) = 2 \cdot \arg z \tag{30}$$

Hvilket kan overføres til det generelle tilfælde:

$$|z^n| = |z|^n \qquad \text{og} \qquad \arg(z^n) = n \cdot \arg z \tag{31}$$

Som tidligere – benyttes at: $r = |z|$ og $v = \arg z$, fås:

$$\begin{gathered} z^n = \left(r\left(\cos(v) + i \cdot \sin(v)\right)\right)^n = |z^n|\left(\cos\left(\arg(z^n)\right) + i \cdot \sin\left(\arg(z^n)\right)\right) \\ \Updownarrow \\ \underline{\underline{z^n = r^n\left(\cos(nv) + i \cdot \sin(nv)\right)}} \; (\text{De Moivres formel}) \end{gathered} \tag{32}$$

Et par eksempler[7]

For at anskueliggøre de Moivres formel, betragtes det komplekse tal z, som har den numeriske værdi 1 og argumentet v:

$$z = \cos(v) + i \cdot \sin(v)$$

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\cos(v) + i \cdot \sin(v)\right)^2 = \cos^2(v) + \left(i \cdot \sin^2(v)\right)^2 + 2 \cdot i \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \\ &= \cos^2(v) - \sin^2(v) + 2 \cdot i \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \end{aligned}$$

Det er allerede fastsat vha. de Moivres formel: $z^2 = r^2 \cdot \left(\cos(2v) + i \cdot \sin(2v)\right)$,
men da $r = z = 1$, simplificeres dette til: $z^2 = \left(\cos(2v) + i \cdot \sin(2v)\right)$.

Sammenlignes nu realdelen og den imaginære del hver for sig, fås formlerne for sinus og cosinus til den dobbelte vinkel, som burde være kendt:

$$\boxed{\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v) \qquad \text{og} \qquad \sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)} \tag{33}$$

[7] Carstensen, Jens: Komplekse tal, 2. rev. udg., p. 15

Reciprokke tal:

Det reciprokke tal, $\frac{1}{z}$, til det komplekse tal, $z \neq 0$ bestemmes nemt ved konjugering.

Fra tidligere vides det, at: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. På baggrund af dette laves følgende omskrivning:

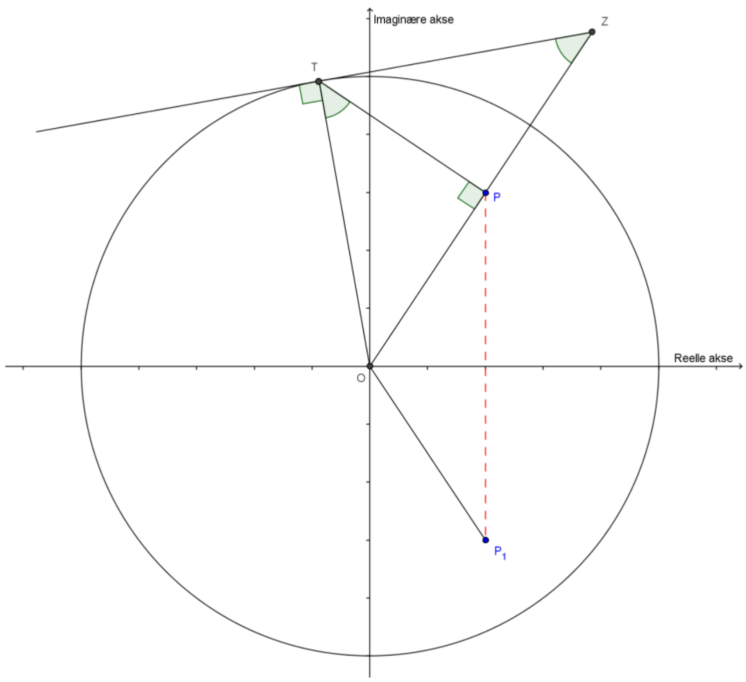
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$
$$\Updownarrow$$
$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Da $z = x + iy$, omskrives dette til:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{34}$$

Hvilket passer fint overens med formel (10).

En grafisk metode til bestemmelse af det reciprokke tal $\frac{1}{z}$ kan anvendes, hvis man tager udgangspunkt i nedenstående figur.



Z repræsenterer det komplekse tal, z. Der søges den reciprokke værdi til tallet z.

En tangent fra Z til enhedscirklen, har røringspunktet T, og fra dette punkt, T, nedfældes den vinkelrette på linjen OZ i punktet P.

Da TP er højde i den retvinklede trekant, $\triangle OTZ$, er $\triangle TPO$ og $\triangle ZPO$ ensvinklede og har dermed proportionale sider[8].

$$\frac{|OP|}{|OT|} = \frac{|OT|}{|OZ|} \Leftrightarrow |OP| = \frac{1}{r},$$

Da $|OT| = 1,$ og $|OZ| = r = |z|.$

Punktet P_1, der fremkommer ved spejling af P i abscissen, repræsenterer et komplekst tal, hvis argument er $-v$ og hvis modulus er $\frac{1}{r}$. Dette tal er netop det reciprokke $\frac{1}{z}$, som søges, idet:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \left(\cos(-v) + i \cdot \sin(-v)\right)$$

Punktet P repræsenterer tallet $\frac{1}{z}$ Man siger, at konstruktionen af P ud fra z er foregået ved inversion i enhedscirklen.

[8] F.eks.: Preben Madsen: Teknisk matematik, p. 85.

Rødder - andengradsligningen

Arbejder man med de reelle tal, har man indtil videre defineret $\sqrt{a}$ $(a>0)$ som den positive løsning til ligningen $x^2 = a$.

Man erindrer naturligvis reglen:

Den n'te rod af et tal a, er det tal b, som har samme fortegn som a, og som opløftet til n'te potens giver a.[9] (35)

Det vil med andre ord sige, at hvis man tager kvadratroden (den 2. rod) af 9, så er resultatet 3, fordi 3 er positiv, ligesom 9. Det er en definition! Det betyder dog ikke, at hvis man bliver stillet overfor ligningen $x^2 = 9$, at der kun findes den ene rod $x = 3$. Der gælder stadigvæk, at både 3^2 og $(-3)^2$ er lig med 9, idet at $3 \cdot 3 = 9 \vee (-3) \cdot (-3) = 9$. Så løsningerne til ligningen $x^2 = 9$ er: $x = 3 \vee x = -3$.

Det er også logisk nok, så længe man kun uddrager kvadratrødder. Går man videre til kubikrødder (den 3. rod), så er sagen lidt anderledes:

$\sqrt[3]{27} = 3$, da $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$, mens
$\sqrt[3]{-27} = -3$, da $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^2 \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$.

Ovenstående eksempel passer også fint med regel (35), idet -3 og -27 begge er negative.

Men arbejdes der indenfor de komplekse tals legeme, $\mathbb{C}$, er det ikke muligt at indføre en ordning af tallene efter størrelse (de er jo blevet en slags to-dimensionelle), og derfor giver det heller ikke mening at tale om fortegn for de komplekse tal.

Det vil ligeledes være formålsløst at tale om, at en løsning af en ligning giver x-værdierne for skæring med abscissen.

Den binome ligning (ligning med to led)

Den n-te rod af et komplekst tal $a = a_1 + ia_2$ indføres, hvilket vil sige at ligningen $z^n = a = a_1 + ia_2$.

Modulus og argument for de komplekse tal er allerede defineret, og ved hjælp af dem opskrives følgende ligning:

$$z^n = r\left(\cos(v) + i \cdot \sin(v)\right), \text{ hvor } r = |a| \text{ og } v = \arg a \tag{36}$$

Der søges den numeriske værdi af den søgte løsning, z, til ligningen, og den findes således:

$$\left|z^n\right| = |z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|} = \sqrt[n]{r}. \tag{37}$$

[9] F.eks.: Preben Madsen: Teknisk matematik, p. 25.

Der mangler stadig argumentet:

$$\arg\left(z^n\right) = \arg a + 2p\pi \Leftrightarrow n \cdot \arg z = v + 2p\pi \Leftrightarrow \arg z = \frac{v + 2p\pi}{n} \qquad (38)$$

Her gælder, at $p \in \mathbb{Z}$, men det er kun nødvendigt at lade p antage værdierne $0, 1, 2, ..., n-1$, idet alle andre værdier af p, vil give argumenter for z, der allerede er fundne. Dette er dog på nær multiplum af 2π.

Ligningen (36) har altså n løsninger, der er givet ved:

$$\boxed{z = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{v+2p\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{v+2p\pi}{n}\right)\right), \qquad p \in \{0,1,2,...,n-1\}} \qquad (39)$$

Et par eksempler[10]

Der ønskes at løse ligningen: $z^5 = 2 + 3i$.

$$r = |a| = \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+16} = \underline{\sqrt{13}}$$

$v = \arg z = \arg(2+3i)$, hvilket giver:

$$\cos(v) = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \Leftrightarrow v = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \qquad \Leftrightarrow \underline{v = \pm 0{,}9828(rad)}$$

$$\sin(v) = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \Leftrightarrow v = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \qquad \Leftrightarrow \underline{\underline{v = 0{,}9828(rad)}}$$

Ergo er løsningen:

$$z = \sqrt[5]{\sqrt{13}} \cdot \left(\cos\left(\frac{0{,}9828 + 2p\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0{,}9828 + 2p\pi}{5}\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{z = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0{,}9828 + 2p\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0{,}9828 + 2p\pi}{5}\right)\right),\ p \in \{0,1,2,3,4\}}}$$

Ihærdig brug af en lommeregner giver således følgende løsninger:

[10] Carstensen, Jens: Komplekse tal, 2. rev. udg., p. 18

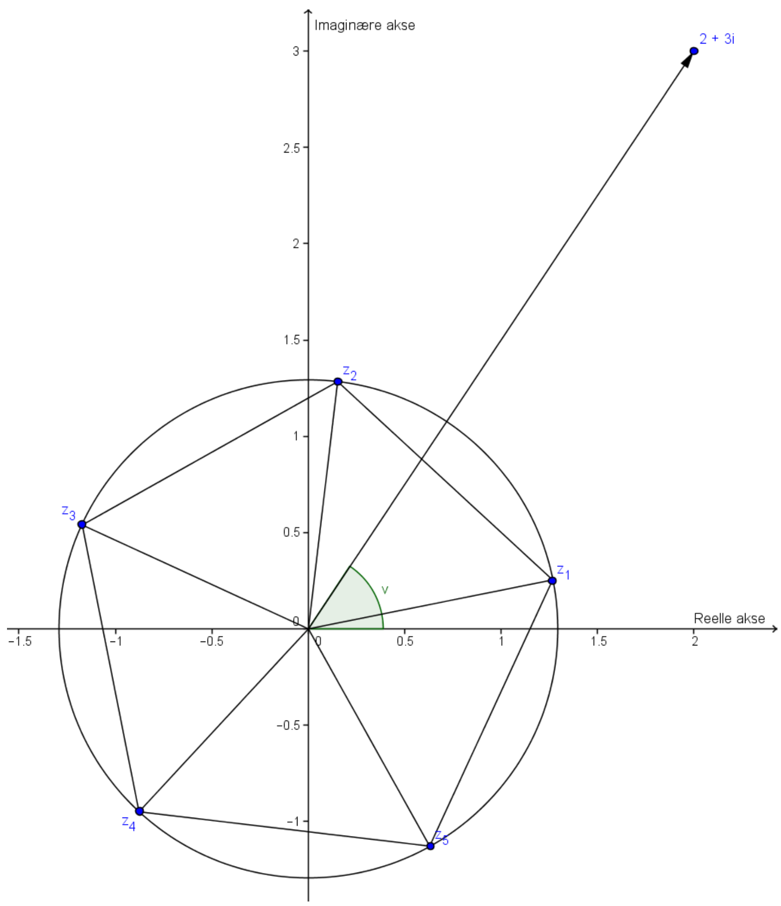
$$z_0 = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} \right) \right) = 1,2675 + 0,2524i$$

$$z_1 = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} \right) \right) = 0,1516 + 1,2835i$$

$$z_2 = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5} \right) \right) = -1,1738 + 0,5408i$$

$$z_3 = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5} \right) \right) = -0,8771 - 0,9492i$$

$$z_4 = \sqrt[10]{13} \cdot \left(\cos\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{0,9828 + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5} \right) \right) = 0,6317 - 1,1275i$$



Løsningerne kan ses på ovenstående figur. Løsningerne ses som vinkelspidser i et regulært polygon (her en femkant), som alle ligger på en cirkel med centrum i origo og radius $\sqrt[10]{13}$.

De fem vinkelspidser, z_1, z_2, z_3, z_4 & z_5 er altså alle den 5. rod af $2+3i$.

Enhedsrødder

Betragtes nu ligningen $z^n = 1$, ses følgende:

$r=1$ og $v=\arg a=\arg 1=0$. Ligningen har derfor løsningerne:

$$z=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{v+2p\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{v+2p\pi}{n}\right)\right),\quad p\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

$\Updownarrow$

$$z=\sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right)$$

$\Updownarrow$ $\left(\text{da } \sqrt[n]{1} \text{ altid er lig med } 1\right)$

$$\underline{\underline{z=\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2p\pi}{n}\right),\quad p\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}.}}$$

Disse tal ligger på enhedscirklen, da $\sqrt[n]{1}=1$. Stadig, udspænder løsningerne en regulær n-kant med en vinkelspids i $(1;0)$.
Disse komplekse løsninger kaldes for de n-te enhedsrødder.

Traditionelt bruger man det græske bogstav ε (lille epsilon) for tallet svarende til $p=1$, hvilket giver:

$$\varepsilon=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{40}$$

De øvrige rødder må så netop være potenserne af ε, dvs.:

$$1,\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{2},\varepsilon^{3},\ldots,\varepsilon^{n-1}.$$

6) Bestem lokale ekstrema

Opgaver (facit)

101)
Udregn følgende komplekse tal på formen $x+iy$.

$$z_1=(2-i)(4+2i)-(8+i)(6-2i)$$
$$=8+4i-4i-2i^2-\left(48-16i+6i-2i^2\right)=8+2-(48-10i+2)=10-50+10i$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_1=-40+10i}}$$

$$z_2=(3-2i)^3\left(=(3-2i)^2\cdot(3-2i)\right)$$
$$=\left(9+4i^2-12i\right)(3-2i)=(9+4(-1)-12i)(3-2i)=(5-12i)(3-2i)=15-10i-36i+24i^2=15-46i-24$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_2=-9-46i}}$$

$$z_3=\frac{2+i}{7-i}$$
$$=\frac{(2+i)\cdot(7+i)}{(7-i)\cdot(7+i)}=\frac{14+2i+7i+i^2}{49+7i-7i-i^2}=\frac{14+9i+(-1)}{49-(-1)}=\frac{13+9i}{50}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_3=\frac{13}{50}+\frac{9}{50}i}}\approx 0{,}26+0{,}28i$$

$$z_4=(1+2i)^2$$
$$=(1+2i)\cdot(1+2i)=1+4i^2+4i=1-4+4i$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_4=-3+4i}}$$

$$z_5=\frac{4-i}{4+i}$$
$$=\frac{(4-i)\cdot(4-i)}{(4+i)\cdot(4-i)}=\frac{16-4i-4i+i^2}{16-4i+4i-i^2}=\frac{16-8i-1}{16+1}=\frac{15-8i}{17}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_5=\frac{15}{17}-\frac{8}{17}i}}\approx 0{,}88-0{,}47i$$

$$z_6=\frac{5-2i}{5+2i}-\frac{5+2i}{5-2i}$$
$$=\frac{(5-2i)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)}-\frac{(5+2i)\cdot(5+2i)}{(5-2i)\cdot(5+2i)}=\frac{25-10i-10i+4i^2}{25-10i+10i-4i^2}-\frac{25+10i+10i+4i^2}{25+10i-10i-4i^2}$$
$$=\frac{25-20i+4\cdot(-1)}{25-4\cdot(-1)}-\frac{25+20i+4\cdot(-1)}{25-4\cdot(-1)}=\frac{25-20i-4}{25+4}-\frac{25+20i-4}{25+4}=\frac{25-20i-4-25-20i+4}{29}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{z_6=-\frac{40}{29}i}}\approx -1{,}38i$$

105)

Find $|z|$ og $\operatorname{Arg} z$ for hvert af de følgende tal:

$$z_1 = 1 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{\operatorname{Re} z_1{}^2 + \operatorname{Im} z_1{}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_1| = \sqrt{2}}}$$

$$\cos(v_1) = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_1 = \pm 0{,}7854(rad)}$$

$$\sin(v_1) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow v_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_1 = 0{,}7854(rad)}}$$

$$z_2 = i - 3 \ \left(= -3 + i\right)$$

$$|z_2| = \sqrt{\operatorname{Re} z_3{}^2 + \operatorname{Im} z_3{}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_2| = \sqrt{10}}}$$

$$\cos(v_2) = \frac{x_2}{r} = \frac{x_2}{|z_2|} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \quad \Leftrightarrow v_2 = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_2 = \pm 2{,}8198(rad)}$$

$$\sin(v_2) = \frac{y_2}{r} = \frac{y_2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Leftrightarrow v_2 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = 0{,}7854(rad)}}$$

$$z_3 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$= \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{1+2i+(-1)}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$|z_3| = \sqrt{\operatorname{Re} z_2{}^2 + \operatorname{Im} z_2{}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_3| = 1}}$$

$$\cos(v_3) = \frac{x_3}{r} = \frac{x_3}{|z_3|} = \frac{0}{1} \quad \Leftrightarrow v_3 = \arccos(0) \quad \Leftrightarrow \underline{v_3 = \pm\frac{\pi}{2}(rad) \approx \pm 1{,}57(rad)}$$

$$\sin(v_3) = \frac{y_3}{r} = \frac{y_3}{|z_3|} = \frac{1}{1} \quad \Leftrightarrow v_3 = \arcsin(1) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_3 = \frac{\pi}{2}(rad)}} \approx 1{,}57(rad)$$

105) Fortsat

$$z_4 = 4i - 5\ (= -5 + 4i)$$

$$|z_4| = \sqrt{\operatorname{Re} z_4^{\ 2} + \operatorname{Im} z_4^{\ 2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_4| = \sqrt{41}}}$$

$$\cos(v_4) = \frac{x_4}{r} = \frac{x_4}{|z_4|} = \frac{-5}{\sqrt{41}} \quad \Leftrightarrow v_4 = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_4 = \pm 2{,}469(rad)}$$

$$\sin(v_4) = \frac{y_4}{r} = \frac{y_4}{|z_4|} = \frac{4}{\sqrt{41}} \quad \Leftrightarrow v_4 = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) \quad \Leftrightarrow v_4 = 0{,}7854(rad) \vee \underline{\underline{v_{4_{alt}} = \pi - v_4 = 2{,}469(rad)}}$$

$$z_5 = 17 + 3i$$

$$|z_5| = \sqrt{\operatorname{Re} z_5^{\ 2} + \operatorname{Im} z_5^{\ 2}} = \sqrt{17^2 + 3^2} = \sqrt{289+9} = \sqrt{298}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_5| = \sqrt{298}}} \approx 17{,}26$$

$$\cos(v_5) = \frac{x_5}{r} = \frac{x_5}{|z_5|} = \frac{17}{\sqrt{298}} \quad \Leftrightarrow v_5 = \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{298}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_5 = \pm 0{,}1747(rad)}$$

$$\sin(v_5) = \frac{y_5}{r} = \frac{y_5}{|z_5|} = \frac{3}{\sqrt{298}} \quad \Leftrightarrow v_5 = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{298}}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_5 = 0{,}1747(rad)}}$$

$$z_6 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$$

$$|z_6| = \sqrt{\operatorname{Re} z_6^{\ 2} + \operatorname{Im} z_6^{\ 2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{16}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{|z_6| = \frac{5}{6}}}$$

$$\cos(v_6) = \frac{x_6}{r} = \frac{x_6}{|z_6|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow v_6 = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{v_3 = \pm 0{,}9273(rad)}$$

$$\sin(v_6) = \frac{y_6}{r} = \frac{y_6}{|z_6|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{-12}{15} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow v_6 = \arcsin\left(\frac{-4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{v_3 = -0{,}9273(rad)}}$$