MATEMATIK

NOTAT 26

INTEGRATION VED SUBSTITUTION

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: MAJ 2026

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
ϒ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

INDHOLDSFORTEGNELSE: 3

INTRODUKTION: 5

UBESTEMT INTEGRAL VHA. SUBSTITUTION: 5

BESTEMT INTEGRAL VHA. SUBSTITUTION: 12

BEVIS: 14

Introduktion:

En matematikunderviser har engang sagt:

”At differentiere er et værktøj – at integrere er en kunstart!”.

Det vil i praksis sige, at det mange gange er ”relativt nemt” at differentiere et udtryk, mens det kan volde store besværligheder at integrere et relativt simpelt udtryk.

I forbindelse med differentialregningen har det været diskuteret, hvordan man kan differentiere en sammensat funktion vha. **kædereglen**. (Se notat 23 for detaljer om dette).

Men hvordan skal man så angribe det modsatte problem? – Altså hvordan skal man integrere en sammensat funktion?

Der er faktisk tale om en meget specifik regneregel.

Nemlig regnereglen som hedder ”**Integration ved substitution**”.

Og som med alle andre regneregler, så skal udgangspunktet være temmelig specifikt. (Tænk bare på andengradsligningen, hvor udgangspunktet **skal** være $ax^2+bx+c=0$, hvis formelapparatet skal kunne bruges).

Ubestemt integral vha. substitution:

I dette tilfælde:

Lad *f* være en kontinuert og differentiabel funktion, der har *F* som stamfunktion, og lad *g* være en differentiabel funktion. Da er:

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right)+k$$

Det ser vildt ud, men det er det ikke nødvendigvis.

I ovennævnte regel kan $f(x)$ ses som den ”ydre” funktion, og $g(x)$ er den ”indre” funktion. $g'(x)$ er differentialkvotienten af den indre funktion.

I praksis er det noget nemmere, hvis man laver en lille omskrivning.

Det erindres, at udtrykket for en differentialkvotient kan opskrives på flere måder:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

Dette kan tolkes som: ”Funktionen $f(x)=y$, differentieret med hensyn til variablen x”.

Det antages, at den indre funktion, $g(x)$, skrives blot som u. (Dette er substitutionen – altså at funktionsudtrykkes for g **substitueres** (dvs. udskiftes) med u).

$$u=g(x)$$

Integration ved substitution

Da $u = g(x)$, er funktionen nu navngivet u, og heraf følger direkte at:

$$g'(x) = \frac{du}{dx}$$

Som nævnt i ”Notat 23 – Om kædereglen”, så er $\frac{du}{dx}$ et fast udtryk, så egentlig er det ikke ok at betragte det som en almindelig brøk – selvom den jo ligner en almindelig brøk til forveksling – men det virker i praksis, så der ”snydes” en lille smule og udtrykket ganges igennem med dx, så resultatet bliver:

$$g'(x) = \frac{du}{dx}$$
$$\Updownarrow$$
$$g'(x) \cdot dx = du$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{du = g'(x) \cdot dx}$$

> Når den indre funktion substitueres med u, skal man betale et ”veksle gebyr”. I og med at x er erstattet i den indre funktion med u, så er det jo heller ikke længere x, der integreres med hensyn til, men derimod u.
> Derfor udregnes ”forholdet” mellem u og x.

Det er dette, som er ”motoren” i regnereglen.

Det nemmeste er nok at se på et meget simpelt eksempel:

Bestem integralet af funktionen: $f(x) = (3x+2)^4$

Den indre funktion er i dette tilfælde: ”$3x+2$”. Da den skal håndteres, navngives den med bogstavet u. – Altså: $u = g(x) = 3x+2$.

Tidligere blev differentialkvotienten for den indre funktion udregnet som: $du = g'(x) \cdot dx$.

$$du = g'(x) \cdot dx$$
$$\Updownarrow$$
$$du = 3 \cdot dx$$

> Idet, $g'(x) = \frac{du}{dx} 3x+2 = 3$

Udtrykket isoleres for dx.

$$dx = \frac{1}{3} \cdot du$$

Nu begyndes selve integrationen af udtrykket. Men husk, at den indre funktion er erstattet af u.

$$F(x) = \int (3x+2)^4 dx$$
$$\Updownarrow$$
$$F(u) = \int u^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot du$$

> Her er dx blevet substitueret med $\frac{1}{3} \cdot du$.
> Det er jo lige blevet udregnet, at det er det samme.

Alting stemmer nu. Funktionsudtrykket er en funktion af *u*, og der står *du* bag udtrykket.

Som det er vist tidligere, kan en konstant sættes ud foran integraltegnet.

$$F(u) = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot u^5 + k \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$F(u) = \frac{1}{15} u^5 + k$$

Konstanterne multipliceres.

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{F(s) = \frac{1}{15}(3x+2)^5 + k}}$$

Der substitueres tilbage til $3x+2$.

Dette bliver meget nemmere, når man har udregnet nogle eksempler.

Af og til, kan man også udnytte, at regnereglen indeholder hele $g'(x)$ eller dele af den. Man kan lægge mærke til, om der i det udtryk, der skal integreres, er forekomster af *x* med netop en grads forskel.

Et eksempel:

Bestem stamfunktionen til funktionen: $f(x) = \sqrt{2-3x^2} \cdot x$

Her ses det tydeligt, at der er forekomst af x^2 i det, der senere identificeres som den indre funktion, og der er forekomst af *x* i den ydre funktion.

Udtrykket omskrives, fordi man ikke kan operere med kvadratrødder:

$$f(x) = \left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

Den indre funktion, substitueres med *u*:

$$u = 2 - 3x^2$$

u differentieres med hensyn til *x* og *dx* isoleres:

$$\frac{du}{dx} = -6x$$

$$\Updownarrow$$

$$du = -6x \cdot dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{-\frac{1}{6} du = x \cdot dx}$$

Integration ved substitution

Det er ikke helt, dx, som er blevet isoleret. Det er " $x \cdot dx$ ".
Men ser man på den funktion, som skal integreres, opdager man, at der indgår " $x \cdot dx$ " til sidst i funktionen. Det kan man udnytte! Så er der jo bare lidt mere, som kan substitueres.

Proceduren er den samme som ved det tidligere eksempel, så de fleste kommentarer er udeladt.

$$f(x) = \left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$\Updownarrow$$

$$F(x) = \int \left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x dx$$

$$\Updownarrow$$

$$F(u) = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot du$$

Her er $x \cdot dx$ blevet substitueret med $-\frac{1}{6} \cdot du$.
Det er jo lige blevet udregnet, at det er det samme.

$$\Updownarrow$$

$$F(u) = -\frac{1}{6} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\Updownarrow$$

$$F(u) = -\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + k \right] = -\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + k \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{F(x) = -\frac{1}{9} \cdot \left(2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}} + k}}$$

Dette problem kan også løses på en lidt anden måde. Det er ikke fordi, der er den store forskel – der er såmænd bare byttet lidt rundt på rækkefølgen af udregninger.

Samme udgangspunkt:

$$f(x) = \left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

Den indre funktion, substitueres med u:

$$u = 2-3x^2$$

u differentieres med hensyn til x og dx isoleres – men denne gang helt til dx.:

$$\frac{du}{dx} = -6x$$

$$\Updownarrow$$

$$du = -6x \cdot dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} du = dx}$$

$$f(x)=\left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x$$
$$\Updownarrow$$
$$F(x)=\int\left(2-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot xdx$$
$$\Updownarrow$$
$$F(u)=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{x}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{x}}\cdot du$$

Her er dx blevet substitueret med $-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}\cdot du$. Det ses, at de to røde faktorer går ud mod hinanden.

$$\Updownarrow$$
$$F(u)=-\frac{1}{6}\cdot\int u^{\frac{1}{2}}du$$

… og tilbage til den samme udregning.

$$\Updownarrow$$
$$F(u)=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}\right]=-\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{F(u)=-\frac{1}{9}\cdot\left(2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Er man rigtig heldig, er det en stor portion af udtrykket, som kan reduceres bort ved integrationen. Se følgende eksempel:

Bestem Stamfunktionen til funktionen: $f(x)=(2x+4)\cdot\sqrt{x^2+4x+9}$

Her identificeres den indre funktion som:

$$u=x^2+4x+9.$$

$$\frac{du}{dx}=2x+4$$

Allerede her, bemærkes det, at $\frac{du}{dx}$ er det samme, som den første parentes i funktionsudtrykket.

$$\frac{du}{dx}=2x+4$$
$$\Updownarrow$$
$$du=(2x+4)\cdot dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{dx=\frac{du}{2x+4}}=\frac{1}{2x+4}\cdot du$$

$$F(x)=\int(2x+4)\cdot\sqrt{x^2+4x+9}\,dx$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\int\cancel{(2x+4)}\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{\cancel{2x+4}}\cdot du$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\int\sqrt{u}\;du$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\int u^{\frac{1}{2}}\;du$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot u^{\frac{1}{2}+1}+k\right]=\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot u^{\frac{3}{2}}+k\right]=\left[\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+k\right]$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{F(x)=\left[\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+4x+9\right)^{\frac{3}{2}}+k\right]}}$$

Sidste eksempel

Bestem Stamfunktionen til funktionen: $f(x)=\left(e^x-x^{-2}\right)\cdot\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^5$

$$F(x)=\int\left(e^x-x^{-2}\right)\cdot\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^5 dx$$

$$u=e^x+\frac{1}{x}$$

$\Updownarrow$

$$u'=\frac{du}{dx}=e^x-x^{-2}$$

$\Updownarrow$

$$du=\left(e^x-x^{-2}\right)\cdot dx$$

$\Updownarrow$

$$\underline{dx=\frac{du}{e^x-x^{-2}}}$$

Husk, at:
$\frac{1}{x}=x^{-1}$

$$F(u)=\int \cancel{\left(e^{x}-x^{-2}\right)}\cdot u^{5}\cdot \frac{1}{\cancel{e^{x}-x^{-2}}}\,du$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\int u^{5}\,du$$

$\Updownarrow$

$$F(u)=\left[\frac{1}{6}u^{6}+k\right]$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{F(u)=\left[\frac{1}{6}\left(e^{x}+\frac{1}{x}\right)^{6}+k\right]}}$$

Bestemt integral vha. substitution:

Man kan naturligvis også integrere bestemt ved hjælp af integration ved substitution.

Der er endda to måder at gøre det på, og begge kan virke nemmere end når man integrerer ubestemt ved hjælp af substitution.

Den første metode kombinerer helt ligefremt integration ved substitution – ubestemt med indsættelse af integrationsgrænser efterfølgende.

Eksempel:

Udregn: $\int_{x=0}^{x=1} 3x^2 \left(x^3-1\right)^5 dx$.

x^3-1

$\int_{x=0}^{x=1} 3x^2 \left(x^3-1\right)^5 dx$

$$u = x^3 - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$du = 3x^2 dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \cancel{3x^2}\, u^5 \frac{1}{\cancel{3x^2}} du$$
$$= \int_{x=0}^{x=1} u^5 du$$
$$= \left[\frac{1}{6}\cdot u^6\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \left[\frac{1}{6}\cdot \left(x^3-1\right)^6\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \left[\frac{1}{6}\cdot\left(1^3-1\right)^6\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot\left(0^3-1\right)^6\right]=\left[\frac{1}{6}\cdot(0)^6\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot(-1)^6\right]=\left[\frac{1}{6}\cdot 0\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot 1\right]=0-\frac{1}{6}$$
$$\underline{\underline{=-\frac{1}{6}}}$$

I forhold til selve integrationen, er der ingen forskel på at udregne det bestemte integral på denne måde. Da det jo er et bestemt integral, ligger forskellen i, at der skal indsættes integrationsgrænser (hvilket burde være kendt stof), og at resultatet i

sagens natur er en talværdi og ikke et funktionsudtryk, som det jo er tilfældet ved ubestemt integration. Netop fordi der er tale om en talværdi, skal man **ikke** substituere tilbage for at få det korrekte resultat.
Den anden metode er ofte hurtigere.
I den første metode har man integreret ved først at substituere x^3-1 med u for siden at substituere tilbage til det oprindelige udtryk i x.
Det gode ved den første metode er, at man ikke behøver at tænke meget over integrationsgrænserne. De er jo givet i opgaven.

I den anden metode substituerer man ligeledes x^3-1 med u. Men her substituerer men **ikke** tilbage igen. Her lader man integrationsresultatet stå, som en funktion af u.
Til gengæld kan man ikke bruge de oprindelige integrationsgrænser. Det er jo x-værdier, som afgrænser kurven for grafen, men det er jo ikke længere et udtryk i x.
Derfor er man tvunget til at omregne integrationsgrænserne til værdier, som kan bruges, når nu udtrykket er en funktion af u.
Dette er gudskelov normalt ikke særligt svært. Der eksisterer jo et udtryk for $u=g(x)$, så det er jo bare at udregne de nye integrationsgrænser i u, som en almindelig funktion af x.

Eksempel med samme opgave:

Udregn: $\int_{x=0}^{x=1} 3x^2\left(x^3-1\right)^5 dx$.

$$\int_{x=0}^{x=1} 3x^2\left(x^3-1\right)^5 dx$$

$$u=x^3-1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{du}{dx}=3x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$du=3x^2dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{dx=\frac{1}{3x^2}du}$$

$$=\int_{x=0}^{x=1} \cancel{3x^2}u^5\frac{1}{\cancel{3x^2}}du$$

Bemærk forskellen på integrationsgrænserne!

Nedre integrationsgrænse: $(x=0)$ $u=g(0)=0^3-1\underline{=-1}$

Øvre integrationsgrænse: $(x=1)$ $u=g(1)=1^3-1\underline{=0}$

$$=\int_{u=-1}^{u=0} u^5du$$

$$=\left[\frac{1}{6}\cdot u^6\right]_{u=-1}^{u=0}=\left[\frac{1}{6}\cdot 0^6\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot(-1)^6\right]=\left[\frac{1}{6}\cdot 0\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot 1\right]=0-\frac{1}{6}$$

$$\underline{\underline{=-\frac{1}{6}}}$$

Bevis:

Det skal bevises, at regnereglen for integration ved substitution gælder.

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + k$$

Som ofte, så bevises denne sætning vha. integrationsprøven – altså ved at differentiere resultatet for at se, om resultatet falder tilbage på integranden.

Højresiden differentieres vha. kædereglen – altså differentiation af en sammensat funktion.

$$(F(g(x))+k)' = F'(g(x))\cdot g'(x) + 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(F(g(x))+k)' = f(g(x))\cdot g'(x)$$

Som det ses af det magentafarvede, så er resultatet af differentiationen af højre side præcis identisk med integranden af det oprindelige udtryk.

Dette viser samtidig, at denne regneregel ikke gælder for alle tilfældige sammensatte funktioner. Der kræves også, at der – i det oprindelige udtryk – ganges med differentialkvotienten af den indre funktion.

Selve metoden hedder jo "Integration ved substitution", fordi man jo foretager en substitution af noget af udtrykket, når man integrerer i praksis.

Den indre funktion ($g(x)$), erstattes af en ny variabel, som kaldes u.
Dette giver:

$$u = g(x)$$

$$\int f(u)\cdot u'dx$$

Beklageligvis er man nu landet på en funktion af u, men dx angiver, at der skal integreres med hensyn til x, og det er jo noget rod.

Der skal derfor laves noget om, hvis det skal kunne lade sig gøre:

$$u' = \frac{du}{dx}$$

Her opfattes det (ellers) faste udtryk: $\frac{du}{dx}$ som en almindelig brøk, og derfor ganges der nu igennem med dx.

$$du = u'\cdot dx$$

Nu kan den ene infinitesimale størrelse, du, således udtrykkes ved hjælp af dx.

Det er tidligere vist, at:

$$\int f(u) \cdot u' dx$$

… og da det nu også er vist, at: $du = u' \cdot dx$, så kan integralet nu omskrives til:

$$\int f(u) du = F(u) + k$$

Husk til sidst at substituere tilbage, således at udtrykket igen ”havner” i x.

$$\int f(u) du = F(g(x)) + k$$

Opgaver

Ubestemt integral

Opgave 1.1

Bestem følgende integraler:

a) $\int (x-2)^4 dx$

b) $\int (3+4x)^8 dx$

c) $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

e) $\int \sin^3(x)\cos(x) dx$

f) $\int (x^2-x+1)(2x-1) dx$

g) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}} dx$

h) $\int \frac{10x-5}{\sqrt{x^2-x+4}} dx$

Bestemt integral

Opgave 2.1

Bestem følgende integraler:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx$

j) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x} dx$

k) $\int_2^6 \frac{1}{e^{2t}} dt$