MATEMATIK

NOTAT 27

CIRKLENS GEOMETRI

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: MAJ 2026

Oversigt over græske bogstaver:

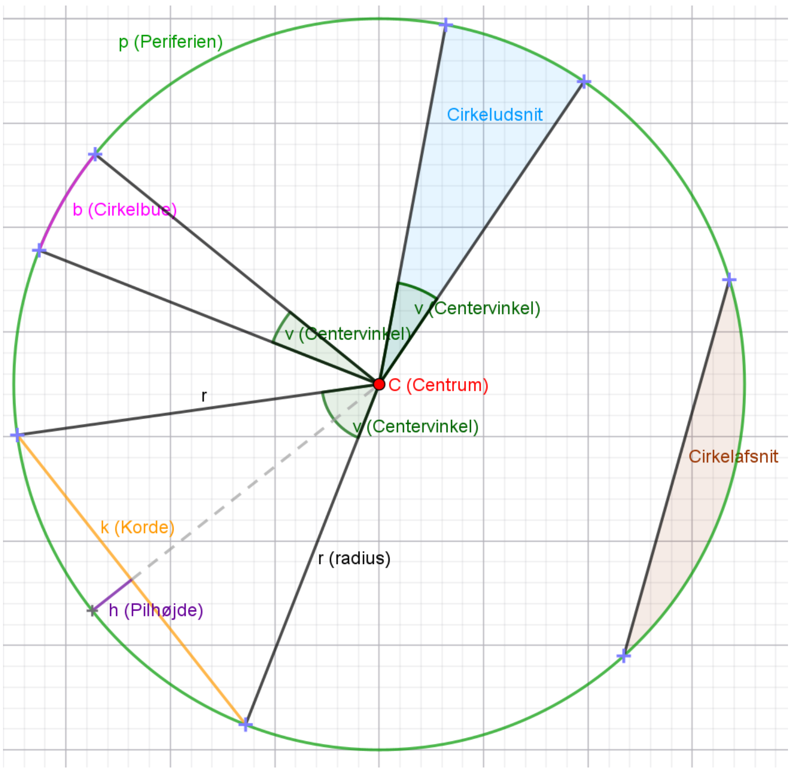
Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
Υ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

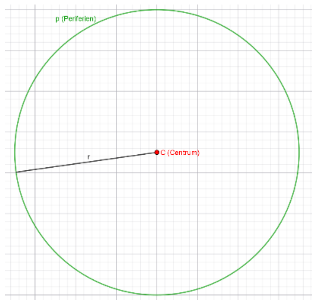
Cirklen:

En cirkel er en af grundfigurerne i den klassiske geometri. En cirkel eksisterer udelukkende i et todimensionelt plan. En cirkel kan indeholde en stor mængde elementer, og de er placeret og navngivet som på figuren nedenfor:



I det følgende forklares hver af de elementer, som en cirkel kan indeholde:

Periferien / Cirkelperiferien, *p*, Centrum, *C* og Radius, *r*
Generelt beskrives selve den streg, som cirklen består af for cirklens periferi. Som allerede nævnt i et tidligere notat, er det i virkeligheden samlingen af et uendeligt antal punkter, som ligger så tæt, at de har udseende af en kontinuert streg. Fælles for disse punkter er, at de alle har den samme afstand (radius, *r*) til cirklens centrum.



π
π er forholdet mellem en cirkels omkreds (længde) og en cirkels diameter (længde). Historisk, har man ”altid” søgt en værdi, som binder en cirkels omkreds og diameter sammen med en enkelt værdi.

Deraf fås direkte:

Cirklens omkreds:

$O = \pi \cdot d$

$\Updownarrow$

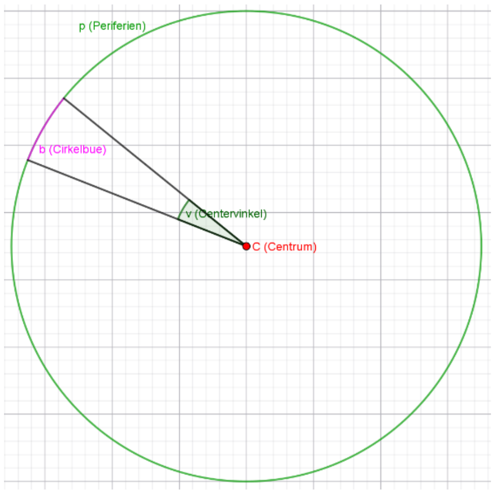
$O = 2 \cdot \pi \cdot r$, idet diameteren er lig med 2 gange radius.

Eller, som vores gamle matematiklærer sagde tilbage i 1970'erne:

"Omkredsen af en cirkel er lig med to piger"!

Ak ja, den gamle charmør …

Cirkelbue



En cirkelbue er en del af cirkelperiferien. På tegningen til højre, er cirkelbuen tegnet ind med pink streg og skrift.
Tænker man på cirkelbuen, bogstavelig talt, som en brøkdel af hele cirkelperiferien, så kan man forestille sig, at man begynder med at have en cirkelbue, som dækker $\frac{1}{360}-\text{del}$ af hele periferien, så må det være indlysende, at centervinklen, er 1° - altså $\frac{1}{360}-\text{del}$ af hele cirkelperiferien.
Således er det også beskrevet, at en cirkelbue defineres ud fra centervinklen.

Nu er det indlysende, at den lille cirkelbue, som har centervinklen 1°, dækker $\frac{1}{360}-\text{del}$ af hele cirkelperiferien, så derfor kan man nu – trinløst – ændre centervinklen til en hvilken som helst værdi mellem 0° og 360°, og længden af buelængden vil ændres tilsvarende.

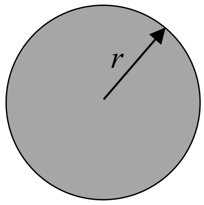
Idet cirklens omkreds er lig med $O_{Cirkel} = 2 \cdot \pi \cdot r$, så vil en cirkelbue, der dækker 1° af hele periferien rundt, have længden: $b_{1°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1°}{360°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360} = \frac{\pi \cdot r}{180}$. Bemærk at enheden ° (grad) forsvinder, da den er repræsenteret en gang i tælleren og en gang i nævneren.
For en vilkårlig vinkel, vil regnestykket se således ud: $b_{v°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot v°}{360°} = \frac{\pi \cdot r \cdot v}{180}$.

Konklusion:

$$\underline{\underline{O_{Cirkel} = 2 \cdot \pi \cdot r}}$$

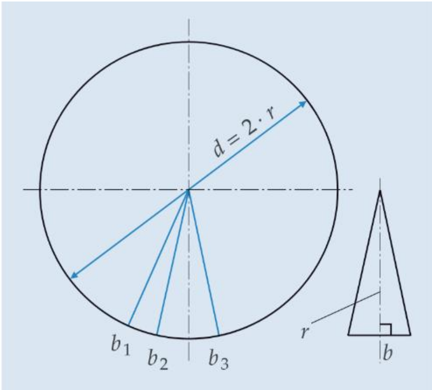
$$\underline{\underline{b = \frac{\pi \cdot r \cdot v}{180}}}$$

Cirklens areal



Arealet af en cirkel er naturligvis størrelsen på den flade, der dækkes, hvis man placerer en cirkel på en anden og større flade.

Cirklens areal kan udledes ved at betragte de allerede omtalte buelængder.



Tænk, at man inddeler en cirkelperiferi i nogle små ligebenede trekanter, som har topvinkel i cirklens centrum, C, og som har den fælles egenskab, at benene er lig med radius og grundlinjen er lig med en buelængde, $b_1, b_2, b_3 \cdots$.

Nu vil nogen sige, at buelængden er buet, og derfor ikke kan kvalificere sig til at være en side i en trekant. Men hvis man nu forestiller sig, at trekanterne er meget små, så kan man med en rimelig tilnærmelse opfatte dem som små trekanter. Disse trekanter vil have højden r og grundlinjen b for hver enkelt af de små – som i tæt på uendeligt små – trekanter. Der er til gengæld uendeligt mange (n) af de små trekanter, som tilsammen vil udgøre det, der kan opfattes som cirklens areal.
Dette kan sammenfattes i en ligning:

$$Areal_{Cirkel} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_n$$

$$\Updownarrow$$

$$Areal_{Cirkel} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_3 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_n$$

Det ses, at der i hvert eneste af de n led er to fælles faktorer, nemlig $\frac{1}{2} \cdot r$, så der faktoriseres ved at sætte $\frac{1}{2} \cdot r$ udenfor en parentes:

$$Areal_{Cirkel} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_3 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b_n$$

$$\Updownarrow$$

$$Areal_{Cirkel} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \right)$$

Da summen af samtlige de små buelængder kan indses at være det samme som længden af cirkelperiferien, kan $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ udskiftes med $2 \cdot \pi \cdot r$.

$$Areal_{Cirkel} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$Areal_{Cirkel} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot r \cdot \cancel{2} \cdot \pi \cdot r$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{Areal_{Cirkel} = \pi \cdot r^2}$$

Naturligvis kan cirklens areal angives som en funktion af cirklens diameter i stedet for – som det blev vist ovenfor – som en funktion af cirklens areal.

Det erindres, at cirklens radius er lig med den halve diameter: $r = \dfrac{Diameter}{2}$.

$$Areal_{Cirkel} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

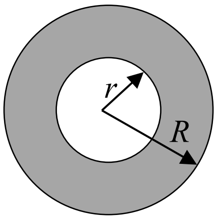
$\Updownarrow$

$$\boxed{Areal_{Cirkel} = \pi \cdot \frac{d^2}{4}}$$

Alle cirklens elementer kan på denne måde frit omregnes mellem radius og diameter. For nemheds skyld og for øget overblik, vil resten af cirklens elementer kun blive udregnet som funktioner af radius.

I opgaveregninger, hvor oplysninger om cirklen er givet ved bl.a. cirklens diameter, der kan man ofte med fordel begynde med at omregne diameteren til radius.

Cirkelrings areal



En cirkelring kan findes i litteraturen under mange forskellige navne:
Cirkelring, ring, torus (mest om 3D), donut og hul cirkel.
En cirkelring er defineret som arealet mellem to koncentriske cirkler (cirkler med samme centrum), som har radierne hhv. r og R.
(Se figuren til højre).
At beregne arealet er nemt. Det svarer til at man har arealet af den store cirkel og så trækker arealet af den lille cirkel fra. Det må give differensen imellem arealerne af de to cirkler.

$$Areal_{Cirkelring} = Areal_{Stor\ cirkel} - Areal_{Lille\ cirkel}$$

$\Updownarrow$

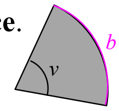
$$Areal_{Cirkelring} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

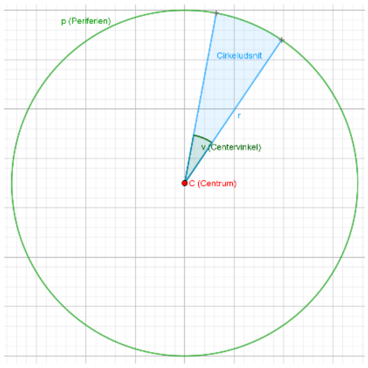
$\Updownarrow$

$$\boxed{Areal_{Cirkelring} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)}$$

Cirkeludsnits areal

Et cirkeludsnit kan vel bedst forklares med det gode gamle danske ord: **en pizzaslice**.





Et cirkeludsnit er en brøkdel af en cirkel med radius *r*, og for at definere, hvor stor en brøkdel det er, angives centervinklen for cirkeludsnittet.
(Se figuren til højre).
Cirkeludsnittet afgrænses således af to radier og en buelængde. Bemærk, at den del af cirkelperiferien som ikke er buelængden jo **også** er en buelængde, så de to specifikke radier, deler altså cirklen i to cirkeludsnit – typisk et spidsvinklet cirkeludsnit og et stumpvinklet cirkeludsnit. Undtagelsen er, hvis de to radier er modsatrettede og derved udgør diameteren, så deles cirklen i to halvcirkler.

For at bestemme arealet af et cirkeludsnit, tænkes det, at man betragter et cirkeludsnit med centervinklen 1°. Man har derved et cirkeludsnit, som udgør $\frac{1}{360}$ – del af en fuld cirkel.
Arealet af dette cirkeludsnit må derfor være den tilsvarende brøkdel af hele cirklens areal:

$$Areal_{Cirkeludsnit_{1^\circ}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 1}{360} \Leftrightarrow \underline{Areal_{Cirkeludsnit_{1^\circ}} = \frac{\pi \cdot r^2}{360}}\ .$$

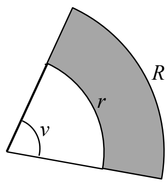
For en vilkårlig vinkel, $v \in [0°;360°]$, må der derfor gælde:

$$Areal_{Cirkeludsnit_{v^\circ}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v^\circ}{360^\circ}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underline{Areal_{Cirkeludsnit_{v^\circ}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360}}}$$ (Bemærk enhederne!)

Cirkelringsudsnits areal



Et cirkelringudsnit kombinerer en cirkelring og et cirkeludsnit.

Det er altså et areal, der er defineret af mellemrummet mellem to koncentriske cirkelafsnit med samme centervinkel, hvor det inderste cirkeludsnit har radius *r*
Og det yderste cirkeludsnit har radius *R*.

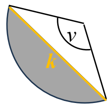
De to arealformler for de to figurer, der ligger til grund for denne figur, kan også kombineres.

Da de to formler allerede er gennemgået, vises her resultatet og bevisførelsen er op til læseren.

$$\boxed{\underline{Areal_{Cirkelringsudsnit_{v^\circ}} = \frac{\pi \cdot v}{360} \cdot \left(R^2 - r^2\right)}}$$

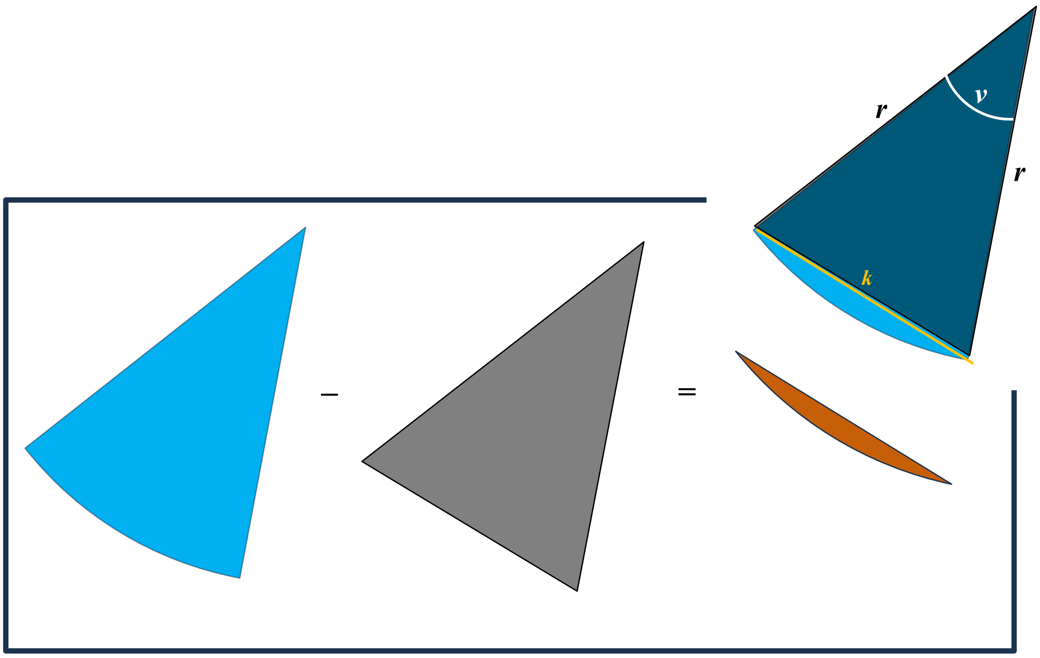
Cirkelafsnits areal

Trækker man en linje mellem to punkter på en cirkels periferi, udgør det en korde. Præcis som ved definitionen på et cirkeludsnit, dannes der ikke bare én, men to cirkelafsnit, som er adskilt af denne korde. Et cirkelafsnit, som har en spidsvinklet centervinkel og et cirkelafsnit, som har en stumpvinklet centervinkel.



Igen – hvis korden er lig med diameteren – så er de to cirkelafsnit lig med to halvcirkler. Dette gør, at hvis centervinklen er 180°, så er cirkeludsnit og cirkelafsnit identiske.

Betragt nedenstående figur. Hvis man har fantasi nok, kan man se, at cirkelafsnittet svarer til et cirkeludsnit minus en ligebenet trekant, hvis ben er lig med cirklens radius og hvor grundlinjen er korden i cirkelafsnittet.



Nu, hvor geometrien bag et cirkelafsnit er defineret, kan arealet bestemmes matematisk,

Formlen for arealet af en vilkårlig trekant erindres fra notatet om ”Trigonometri”.

$$Areal_{Vilkårlig\ trekant} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

Og arealet af et cirkeludsnit er kendt fra tidligere i dette notat:

$$Areal_{Cirkeludsnit_{v°}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360°}$$

Dette giver følgende:

$$Areal_{Cirkelafsnit} = Areal_{Cirkeludsnit} - Areal_{Vilkårlig\ trekant}$$

$\Updownarrow$

$$Areal_{Cirkelafsnit} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360^o} - \frac{1}{2} \cdot |hosliggende| \cdot |hosliggende| \cdot \sin(v)$$

$\Updownarrow$

$$Areal_{Cirkelafsnit} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360^o} - \frac{1}{2} \cdot |r| \cdot |r| \cdot \sin(v) = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360°} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin(v)$$

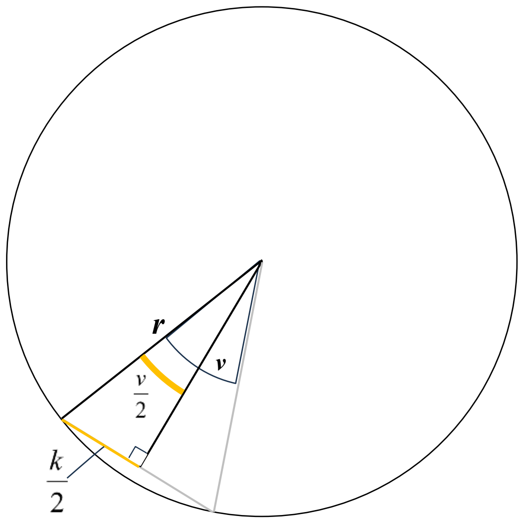
$\Updownarrow$

$$\boxed{Areal_{Cirkelafsnit} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{180°} - \sin(v) \right)}$$

Korde (kordelængde)

En korde, *k*, er en linje, som forbinder to punkter på en cirkels periferi.

For at beregne længden på korden, foretages følgende justering af tegningen, som ses på skitsen til højre.



Den ligebenede trekant, som blev brugt til at udregne arealet af cirkelafsnittet, deles i to retvinklede trekanter.
Tidligere var grundlinjen i den ligebenede trekant lig med korden, så når nu den deles i to "spejlede" trekanter, må den nødvendigvis dele korden i to lige store dele. Derved bliver den ene katete i den retvinklede trekant lig med den halve korde.

Centervinklen er således også delt i to lige store vinkler, så den er nu: $v_{Halv\ korde} = \frac{v}{2}$

Nu opstilles sinus-forholdet for den rette vinkel:

$$\sin(V) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$\Updownarrow$

$$\sin\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\frac{k}{2}}{r}$$

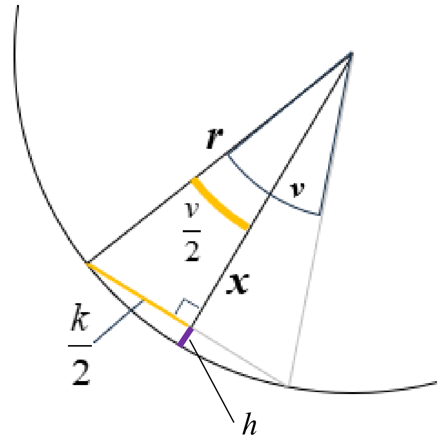
k isoleres:

$$r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{k}{2}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{k = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)}$$

Pilhøjden



Igen tages der udgangspunkt i tegningen, der for overblikkets skyld er vist igen i en forstørret udgave her til højre.

Det indses, at pilhøjden kan udtrykkes ved formlen:

$$h = r - x$$

Idet x er en hjælpestørrelse, som er lig med den hosliggende katete i den samme retvinklede trekant, som blev nævnt i forrige afsnit.

Netop fordi det er den hosliggende katete i en retvinklet trekant, kan cosinus forholdet opskrives:

$$\cos(V) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = r \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right)$$

Sidstnævnte resultat indsættes i det oprindelige udtryk for pilhøjden, hvilket giver:

$$h = r - x$$

$$\Updownarrow$$

$$h = r - r \cdot \cos\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)}$$

Formelsamling:

$$\pi = \frac{Diameter_{Cirkel}}{Omkreds_{Cirkel}}$$

r = Cirklens radius $\left(r = \frac{Diameter}{2} \right)$

d = Cirklens diameter

b = Buelængde (en del af cirkelperiferien)

v = Centervinklen

k = Kordelængde

h = Længden af pilhøjden i et cirkelafsnit

Cirklens omkreds: $O_{Cirkel} = 2 \cdot \pi \cdot r$ (Som en funktion af cirklens radius)

Cirklens omkreds: $O_{Cirkel} = \pi \cdot d$ (Som en funktion af cirklens diameter)

Buelængde: $b = \frac{\pi \cdot r \cdot v}{180°}$ (Som en funktion af cirklens radius og centervinkel)

Buelængde: $b = \frac{\pi \cdot d \cdot v}{360°}$ (Som en funktion af cirklens omkreds og centervinkel)

I de følgende formler, angives kun formlen som en funktion af radius.
Hvis opgaven er givet ved diameter, omregnes diameter til radius ved at dividere med 2.

Cirklens areal: $A_{Cirkel} = \pi \cdot r^2$

Areal af cirkelring: $Areal_{Cirkelring} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2 \right)$

Areal af cirkeludsnit: $Areal_{Cirkeludsnit} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360°}$

Areal af cirkelringsudsnit: $Areal_{Cirkelringsudsnit} = \frac{\pi \cdot \left(R^2 - r^2 \right) \cdot v}{360°}$

Areal af cirkelafsnit: $Areal_{Cirkelafsnit} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{180°} - \sin(v) \right)$

Kordelængde: $k = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2} \right)$

Længde af pilhøjde: $h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2} \right) \right)$

Sammenhæng mellem $r = \frac{h}{2} + \frac{k^2}{8 \cdot h}$

Radius, pilhøjde og korde:

Guide til manglende variable:

Variabel: kan findes vha. følgende variable:
Grundformlerne er udeladt. Her giver det sig selv, hvad der skal bruges for at beregne værdien.

r (Radius (indre)):

O_{Cirkel}	(Cirklens omkreds) Formlen for cirklens omkreds
b & v	(Buelængde og centervinkel) Formlen for buelængde
A_{Cirkel}	(Cirklens areal) Formlen for cirklens areal
$A_{Cirkelring}$ & R	(Cirklens areal og ydre cirkels areal) Formlen for en cirkelrings areal
$A_{Cirkeludsnit}$ & v	(Cirkeludsnittets areal og ydre cirkels areal) Formlen for cirkeludsnittets areal
$A_{Cirkelringsudsnit}$ & R & v	(Cirkelringsudsnittets areal og ydre cirkels radius og centervinklen) Formlen for cirkelringsudsnittets areal
$A_{Cirkelafsnit}$ & v	(Cirkelafsnittets areal og centervinkel) Formlen for et cirkelafsnits areal
k & v	(Kordelængden og centervinklen) Formlen for en kordelængde
h & v	(Pilhøjden og centervinklen) Formlen for pilhøjdens længde

R (Radius (ydre)):

$A_{Cirkelring}$ & r	(Cirkeludsnittets areal og indre cirkels areal) Formlen for en cirkelrings areal
$A_{Cirkelringsudsnit}$ & r & v	(Cirkelringsudsnittets areal og indre cirkels radius og centervinklen) Formlen for cirkelringsudsnits areal
k & h	Kordelængde og pilhøjde Sammenhæng mellem radius, pilhøjde og kordelængde

v (Centervinkel):

$A_{Cirkeludsnit}$ & r	(Cirkeludsnittets areal og indre cirkels areal) Formlen for et cirkeludsnits areal
$A_{Cirkelringsudsnit}$ & R & r	(Cirkelringsudsnittets areal og indre **og** ydre cirkels radius) Formlen for et cirkelringsudsnits areal
$A_{Cirkelafsnit}$ & r	(Cirkelafsnittets areal og cirkelradius) Formlen for et cirkelafsnits areal
k & r	(Kordelængden og cirkelradius) Formlen for en kordelængde
h & r	(Pilhøjden og cirkelradius) Formlen for pilhøjdens længde

Ovenstående skema kan benyttes til at finde ud af, hvordan man kan finde frem til de værdier man mangler for at udregne et konkret problem.

F.eks. hvis man har fået givet en kordelængde og en radius og spørgsmålet er at finde frem til pilhøjden, så er formlen for pilhøjden: $h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$. Det bemærkes, at man skal bruge radius og vinklen for at udregne pilhøjden, men vinklen er endnu ukendt. Til gengæld er cirklens radius givet, så man kender netop de to værdier fra formlen for kordelængden, k og r. Dvs. at man kan benytte formlen for kordelængden, og i den kan man så isolere v og finde centervinklen på den måde. Den fundne centervinkel kan derefter indsættes i udtrykket for pilhøjden, hvor nu både r og v er kendt.

Ordbog:

… over de mest specielle og vigtige ord i dette kapitel i alfabetisk orden.

Bue

Kommer fra norrønt ”bogi” eller engelsk ”bow”. Afledt af verbet ”at bøje”.

En bue,	buen
Flere buer,	alle buerne

Centrum

Kommer fra latin, ”kentron” som betyder ”spids” eller ”midtpunkt”.

Et centrum,	centret
Flere centre,	alle centrene

Cirkel

Kommer fra latin, ”circulis” som er et dimuntiv af ”circus” som betyder ”kreds”.

En cirkel,	cirklen
Flere cirkler,	alle cirklerne

Diameter

Kommer fra græsk, hvor dia- betyder ”gennem” eller ”om” (bare tænk på diaré) og ”-meter”, som betyder ”mål”.

En diameter,	diameteren
Flere diametre,	alle diametrene

Korde

Kommer fra græsk, hvor ”chorde” betyder ”streng” eller ”tarm”.

En korde,	korden
Flere korder,	alle korderne

Periferi (Cirkelperiferi)

Kommer fra græsk, ”peripheria” som betyder ”omkreds”.

En periferi,	periferien
Flere periferier,	alle periferierne

Radius

Kommer fra latin, hvor radius betyder ”stav” eller ”stråle”.

En radius,	radien
Flere radier,	alle radierne

Vinkel

Kommer fra nedertysk, hvor ”winkel” betyder ”hjørne” eller ”krog” eller ”vinkel”.

En vinkel,	vinklen
Flere vinkler,	alle vinklerne